Kontexte und ihre Begriffe

Adalbert Kerber, Wilfried Lex

6. März 1998

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die wir in Bayreuth, Clausthal-Zellerfeld und Innsbruck gehalten haben. Die Formale Begriffsanalyse, der Gegenstand dieses Buches, war dabei eingebettet in Überlegungen aus der Kombinatorik (Abzählungstheorie und konstruktive Theorie Diskreter Strukturen) bzw. der Informatik (Datenbanken, mehrwertige Logik). Diese Verbindungen zu anderen Disziplinen haben wir teilweise belassen, insbesondere wollten wir die Untersuchung von Kontexten hervorheben und dem interessierten Leser Methoden zur Verfügung stellen, solche Kontexte systematisch bereitzustellen, damit genug Spielmaterial für die Ermittlung von Begriffsverbänden zur Verfügung steht.
Wir erfreuten uns beim Halten und beim Vorbereiten dieser Vorlesungen einerseits des Interesses der Studenten, andererseits der massiven Unterstützung der Darmstädter Kollegen R. Wille, B. Ganter, L. Burmeister und K.-E. Wolff, denen die Entwicklung der Begriffsanalyse zu verdanken ist, und die uns sehr großzügig mit umfangreichem Material und Sonderdrucken, Manuskriptentwürfen und Programmen ausstatteten. Mittlerweile ist auch der mathematische Teil des Standardwerks zur formalen Begriffsanalyse erschienen, [10]. Wir haben uns deshalb stärker auf Anwendungen und auf die Abzählung und Konstruktion von Kontextklassen konzentrieren können.

Bayreuth/Clausthal-Zellerfeld, den 6. März 1998,

A. Kerber, W. Lex

Einleitung

Begriffliches Denken — was immer dies in genauem Sinne auch sein mag — bestimmt fast all unsere geistigen Tätigkeiten in hohem Maße. Schon die mentale Entwicklung eines Kindes, insbesondere sein Spracherwerb, ist jeweils durch die Kenntnis und die Beherrschung gewisser Begriffe gekennzeichnet. Ähnlich lehrt uns bereits ein flüchtiger Blick in die Wissenschafts- und Philosophiegeschichte, wie wichtig, ja tragend, das Finden "richtiger" — oder sagen wir vorsichtiger "geeigneter" — Begriffe gewesen sein muß, um wirkliche Einsicht und wahres Verstehen zu gewinnen. Begriffe, so glauben wir, ermöglichen erst "effektives Denken" und scheinen uns für unser gesamtes geistiges Leben von entscheidender Bedeutung.

Wenn *Künstliche Intelligenz* gute Computerimitationen wesentlicher Fähigkeiten des menschlichen Denkens zum Ziele hat, darf sie sich nicht auf Deduktionsalgorithmen für die Aussagenlogik beschränken — so unverzichtbar diese auch sind —, sondern muß Modelle unseres begrifflichen Denkens konstruieren und letztendlich auch implementieren. Mehrere interessante und fruchtbare Vorschläge sind bereits gemacht und umgesetzt worden. Prädikatenlogik und einige auf ihr beruhende Programmiersprachen, semantische Netze, "frames" und verschiedene andere. — Fast immer wird dabei irgendeine graphische Darstellung benutzt, was sich als äußerst hilfreich erweist.

Schließlich ein weiterer Grund, sich mit Präzisierungen des Begriffs *Begriff* zu beschäftigen: Moderne Hardware erlaubt uns, mit ungeheuren Mengen von Daten umzugehen. Aber die große Gefahr dabei ist — und wird es auch möglicherweise zunehmend sein und bleiben —, daß wir in dieser Flut ertrinken. Wir werden nur überleben, wenn es uns gelingt, Strukturen einzubringen, das Datenmaterial zu strukturieren. Statistische Methoden liefern hierzu brauchbare Informationskompressionen, aber es gibt Fälle, wo dabei wesentliche Information

verlorengeht, was tunlichst zu vermeiden ist.
Vor nunmehr etwa anderthalb Jahrzehnten hat Rudolf Wille in Darmstadt — übrigens im Rahmen einer Restrukturierung der Verbandstheorie — eine Begriffspräzisierung vorgeschlagen, die bewußt die alte Dichotomie in Umfang und Inhalt aufnahm (Näheres dazu in Abschnitt 1.1). Der Vorschlag besticht durch seine Einfachheit, Natürlichkeit, Eleganz und universelle Anwendbarkeit. Beispielsweise ergeben sich Begriffshierarchien wie selbstverständlich als vollständige Verbände. Zu der inzwischen stark ausgebauten Theorie gibt es bereits weit über zweihundert Arbeiten.
Die große Anwendbarkeit liegt in folgendem begründet:

1. Stets wird von einer festen Gegenstands- und Merkmalsmenge sowie einer beliebigen, aber festen Relation zwischen beiden — einem sogenannten *Kontext* — ausgegangen. Dieser beschreibt präzise und vollständig das zugrunde gelegte Wissen und ist stets vor Augen.

2. Die oft so schwierige Dateninterpretation wird — auch bei umfangreichen Datenbeständen — wesentlich dadurch erleichtert, daß Abhängigkeiten im Hassediagramm eines Verbandes sichtbar und damit interpretierbar gemacht werden können.

3. Es ist R. Wille und seinen Mitarbeitern — hier wären vor allem auch B. Ganter und P. Burmeister zu nennen — gelungen, schnelle Algorithmen zu entwickeln, die mittlerweile auch implementiert, und u. a. im Programmpaket TOSCANA verfügbar sind, [20].

Vor mehr als drei Jahren hatten wir begonnen, uns mit dieser *Formalen Begriffsanalyse* — so der inzwischen allgemein akzeptierte Name für die erwähnte Theorie — intensiver dahingehend zu beschäftigen, daß sie stärker auch in der Künstlichen Intelligenz, etwa für computerunterstütztes Lernen und Expertensysteme, eingesetzt werden könne. Ein erster Schritt auf diesem Wege schien uns im Hinblick auf die maschinelle Zufallserzeugung von Kontexten die Bestimmung der Anzahl aller wesentlich voneinander verschiedenen Kontexte für eine gegebene Zahl von Gegenständen und eine gegebene Zahl von Merkmalen zu sein (s. Kapitel 2.2). Die Anwendung von Methoden aus der Algebraischen Kombinatorik auf dieses Gebiet erwies sich als interessant. Umgekehrt zeigte sich die Formale Begriffsanalyse als nützliches

und klärendes Hilfsmittel in diversen Gebieten der Mathematik und ihrer Anwendungen (z.B. auch in der Mathematischen Chemie, [5]).
Es sollte deshalb ein Text entstehen, der Studierenden — der Mathematik sowohl als auch der Informatik — bereits nach den Grundvorlesungen zugänglich sei: Da leider das lang erhoffte Standardwerk der Darmstädter Kollegen noch nicht vorlag, entschlossen wir uns, wenigstens die Grundtatsachen der Formalen Begriffsanalyse darzustellen, wohl wissend, daß wir Vieles gar nicht und Einiges nur sehr verkürzt oder andeutungsweise wiedergeben konnten. Daher sei hier für alle weitergehenden Fragen zu Formalen Begriffsanalyse ausdrücklich auf das nun erhältliche Werk [10] verwiesen.
Zudem haben wir uns bemüht, die wichtigsten Fakten über Gruppenoperationen verständlich zu behandeln und eine Einführung in die Pólyasche Abzähltheorie zu geben, die diverse Abzählungen und sogar die Konstruktion von wesentlich verschiedenen Kontexten ermöglicht. Auf diese Weise kann automatisch umfangreiches Beispielmaterial erstellt werden.
Auf den erwähnten Dingen aufbauend wird dann bis zur maschinellen Zufallserzeugung von Kontexten und zu einer bestimmten Art des Maschinenlernens vorgestoßen, wobei für dieses Gebiet noch manche Desiderata offen bleiben; an erster Stelle natürlich ein entsprechendes Programm, mit dessen Hilfe nun die beschriebenen maschinellen Lernprozesse auch konkret realisiert werden könnten.
Für Kritik, insbesondere Verbesserungsvorschläge sind wir jederzeit empfänglich und dankbar.

Kapitel 1

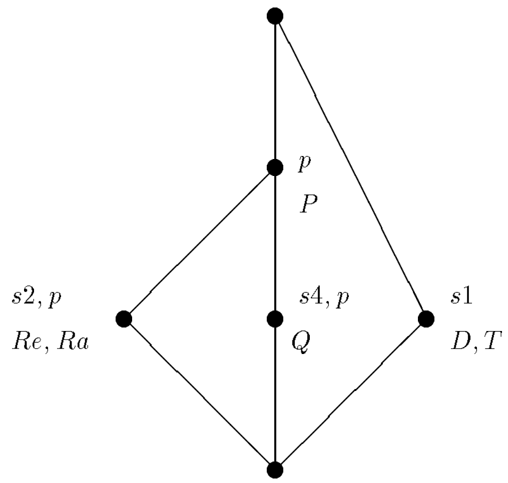
Kontexte

Ein interessantes Beispiel für die erfolgreiche Anwendung von Methoden aus der Theorie Diskreter Strukturen bildet die *Begriffsanalyse.* Sie dient der Strukturierung und Untersuchung von Wissen, das in Form sogenannter *Kontexte* vorliegt, das sind Tabellen, die gewisse Gegenstände und gewisse Eigenschaften umfassen und aufzeigen, welche der aufgeführten Gegenstände welche der aufgelisteten Eingenschaften besitzen. Eine solche Tabelle gibt also eine bestimmte Kenntnis über diese Gegenstände und Eigenschaften wieder.
Betrachten wir als einfaches Beispiel eine Zusammenstellung von Vierecken, die eine gewisse Symmetrie aufweisen, und Symmetrieeigenschaften. Dabei stehe sn für "*genau* n Symmetrieachsen" mit $n = 1, 2, 3, 4$ und p für "Punktsymmetrie":

	$s1$	$s2$	$s3$	$s4$	p
Quadrat				×	×
Rechteck		×			×
Raute		×			×
Parallelogramm					×
Drache	×				
Trapez	×				

Weist also jedes Element einer Vierecksklasse eine gewisse Symmetrie auf, so wurde im Schnittpunkt der entsprechenden Zeile mit der entsprechenden Spalte ein Kreuz eingetragen, sonst nicht.
Die Begriffsanalyse ermöglicht es uns nun, aus einem solchen Kontext einen *Verband von Begriffen* zu ermitteln und graphisch darzustellen,

der das im Kontext enthaltene Wissen übersichtlicher und erhellender präsentiert als in der zunächst vorliegenden Kreuztabelle (wobei wir die Namen der Vierecksklassen in naheliegender Weise abgekürzt haben):



Fragen nach gewissen Abhängigkeiten drängen sich in unserem Beispiel geradezu auf, etwa "Bedingen mindestens zwei Symmetrieachsen Punktsymmetrie?" oder "Ist es zufällig, daß in der dritten Spalte kein Kreuz steht?" oder m. a. W. "…,daß im Bild $s3$ als Beschriftung nicht vorkommt?" usw. — Auch darauf gibt die Begriffsanalyse Antworten: sie ermöglicht es etwa, *Merkmalsimplikationen* systematisch zu untersuchen und insbesondere eine Basis für mögliche Folgerungen zu berechnen, die sich aus dem Kontext ergeben.
Kurz: *Die Formale Begriffsanalyse dient der Strukturierung — und damit der angemessenen Interpretation und Verarbeitung — von Wissen, das in Kontexten vorliegt.*

In diesem einführenden Kapitel werden wir zunächst ganz kurz Kontexte und ihre Begriffe vorstellen, in den nachfolgenden Kapiteln werden die entsprechenden mathematischen Untersuchungen dann en detail durchgeführt.

1.1 Kontexte

Wir definieren hier zunächst, was wir unter einem Kontext verstehen wollen. Danach wird eine mathematische Definition eines Begriffs vorgestellt; sie präzisiert eine philosophische Beschreibung aus dem siebzehnten Jahrundert, die damals schon eine gewisse philosophische Tradition erfaßte und explizit gemacht werden wird. Danach kann dann der Verband der Begriffe eines vorgegebenen Kontextes eingeführt werden. Im Anschluß daran geht es um die Folgerungen, die man aus einem Kontext ziehen kann.

1.1.1 Definition *Unter einem* (einwertigen) Kontext, *wollen wir ein Tripel*

$$\mathcal{K} := (G, M, I)$$

verstehen, bestehend aus einer Menge G, einer Menge M und einer Relation I zwischen diesen beiden, also $I \subseteq G \times M$. Die Elemente von G heißen Gegenstände, *und die von M heißen* Merkmale. *Statt $(g, m) \in I$ schreiben wir, wie üblich, gIm und sagen,* der Gegenstand g habe oder besitze das Merkmal m, *oder* m komme g zu.

$\diamond$

Einen endlichen Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ können wir, wie bei binären Relationen allgemein üblich, nach Numerierung der Elemente von G und M, etwa $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ und $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$, als eine $|G| \times |M|-$Matrix $\Gamma(\mathcal{K})$ mit Einträgen 0 oder 1 notieren, oder auch als sogenannte *Kreuzchentabelle,* wobei anstelle der Einsen ein Kreuzchen $\times$, an allen anderen Stellen nichts eingefügt wird:

$$\Gamma(\mathcal{K}) = (\gamma_{ik}),\ mit\ \gamma_{ik} := \begin{cases} 1, & \text{falls } g_i I m_k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.1.2 Beispiele (Kontexte)

- Der folgende Kontext gibt Aristoteles' Vorstellung von den vier (irdischen) Elementen wieder (s. [5], 5.1, S. 245):

Elemente\Eigenschaften	warm	kalt	trocken	feucht
Feuer	×		×	
Erde		×	×	
Luft	×			×
Wasser		×		×

- Der mathematische Kontext mit der folgenden Gegenstandsmenge $G := \{2, \sqrt{2}, \pi\}$ aus reellen Zahlen und der Merkmalsmenge

  $$M := \{\underline{r}ational, \underline{i}rrational, \underline{a}lgebraisch, \underline{t}ranszendent\},$$

  also ein Kontext, der Wissen aus der Algebra-Vorlesung beschreiben kann, ergibt dabei die $0,1$-Matrix bzw. die Kreuzchentabelle

1.1.3

$g_i \backslash m_k$	r	i	a	t
2	1	0	1	0
$\sqrt{2}$	0	1	1	0
π	0	1	0	1

bzw.

$g_i \backslash m_k$	r	i	a	t
2	×		×	
$\sqrt{2}$		×	×	
π		×		×

- In dem eingangs des Kapitels vorgestellten Kontext haben wir in der Gegenstandsspalte nicht einzelne Gegenstände aufgelistet, sondern ganze Klassen. Dies kann jedoch leicht mit unserem ursprünglichen Konzept in Einklang gebracht werden, indem wir — wie vielfach üblich — jeweils einen beliebigen, aber festgelegten, Repräsentanten der Klasse nehmen oder aber Quadrat, Rechteck, etc. als Wörter auffassen oder schließlich die Klasse der Quadrate usw. als neuen Gegenstand interpretieren.

  Wir geben hier noch ein weiteres entsprechendes ganz alltägliches Beispiel an, das sich auf Sitzgelegenheiten für eine Person bezieht und mit Unterscheidungen arbeitet, wie sie i. w. jedem Kind geläufig sind; dabei haben wir das Nichtvorhandensein der Merkmale explicite berücksichtigt[1] (sogenannter *dichotomer* Kontext):

	Rücken-lehne	Keine Rückenlehne	Arm-lehne	Keine Armlehne
Hocker		×		×
Stuhl	×			×
Gondel		×	×	
Sessel	×		×	

[1] In früheren Jahrhunderten wurden durchaus Sitzmöbel mit Armlehnen, aber ohne Rückenlehnen, benutzt. Die Bezeichnung *Gondel* dafür ist heute nur noch dem Spezialisten geläufig. — Es ist uns bekannt, daß die hier vorgenommene Distinktion für einen Österreicher nur schwer nachvollziehbar ist, da er in der Regel auch einen Stuhl als Sessel bezeichnet!

- Hier ist noch ein weiteres mathematisches Beispiel, diesmal aus der Analysis. Wir listen einige reelle Funktionen f_i auf, die sich in für die Analysis wesentlichen Eigenschaften unterscheiden; dabei stehen s, d, m, p, b, i, u für *stetig, differenzierbar, monoton, polynomial, beschränkt, injektiv, unendlich oft differenzierbar.*

$f_i \backslash m_k$	s	d	m	p	b	i	u
$x \mapsto x + c$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$
$x \mapsto \begin{cases} x+1, x \leq 0 \\ x-1, x > 0 \end{cases}$							
$x \mapsto \begin{cases} x-1, x \leq 0 \\ x+1, x > 0 \end{cases}$			$\times$			$\times$	
$x \mapsto c$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$
$x \mapsto \begin{cases} x, x \leq 0 \\ 2x, x > 0 \end{cases}$	$\times$		$\times$			$\times$	
$x \mapsto x^2$	$\times$	$\times$		$\times$			$\times$
$x \mapsto e^x$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$
$x \mapsto \begin{cases} e^x - 1, x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, x > 0 \end{cases}$	$\times$	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$	

$\diamond$

Ein Kontext ist also i.w. nichts anderes als eine binäre Relation, ohne jedwede Einschränkung, was u. a. die universelle Einsetzbarkeit dieses Konzepts bedingt.

Bereits 1662 haben A. Arnauld und P. Nicole in ihrem Buch "La logique ou l'art de penser" auf die *zweiteilige* Zusammensetzung von *Begriffen* (idées universelles) aus Inhalt (einer Menge von Merkmalen, s. u.) und Umfang (einer Menge von Gegenständen, s. u.) hingewiesen:

> Or dans ces idées universelles il y a deux choses qu'il est tres-important de bien distinguer, *la comprehension,* & *l'étenduë.*[3], S. 51. [2]

Ein *Begriff* zum Kontext (G, M, I) ist ein Paar (A, B), bestehend aus seinem *Umfang* $A \subseteq G$ und seinem *Inhalt* $B \subseteq M$. Dabei müssen A und B gewisse Bedingungen erfüllen, die wir u. a. dem bereits erwähnten Buch von Arnauld und Nicole entnehmen können, das die Grundlage der "Philosophie de Port Royal" bildet:

[2] Für eine deutsche Übersetzung sei auf [4], S. 48, verwiesen.

> I'appelle *comprehension* de l'idée, les attributs qu'elle enferme en soy, & qu'on ne luy peut oster sans la détruire, comme la comprehension de l'idée du triangle enferme extension, figure, trois lignes, trois angles, & l'égalité de ces trois angles à deux droits, & c. I'appelle *étenduë* de l'idée, les sujets à qui cette idée convient,... [3], S. 51.

Das läßt sich formal etwa so fassen: Ein *Begriff* β zum Kontext (G, M, I) sei ein Paar (A, B) aus einer Gegenstandsmenge A, dem *Umfang* von β, d. h. der Menge aller Gegenstände, die unter den Begriff β fallen, und aus einer Merkmalsmenge B, dem *Inhalt* von β, d. h. der Menge aller Merkmale, die dem Begriff β zukommen. Dabei muß jeder Gegenstand aus A jedes Merkmal aus B besitzen und umgekehrt, es muß also gIm gelten für alle $g \in A$ und alle $m \in B$. Dieser Zusammenhang zwischen Umfang und Inhalt eines Begriffs legt es nun nahe, allgemeiner für *beliebige* Gegenstandsmengen A und Merkmalsmengen B die *Ableitungen* A' und B' einzuführen:

$$A' := \{m \in M \mid \forall\, g \in A\colon\, gIm\},\;\; B' := \{g \in G \mid \forall\, m \in B\colon\, gIm\}.$$

Mit ihrer Hilfe können wir, den obigen philosophisch-logischen Anforderungen gemäß, jetzt die zentrale Definition formulieren:

1.1.4 Definition (Begriff) *Ein* Begriff *zum Kontext* (G, M, I) *ist ein Paar* $\beta := (A, B)$ *mit* $A \subseteq G, B \subseteq M$ *und* $A' = B, B' = A$. *Dabei heiße* A *der* Umfang, *auch die* Extension, *und* B *der* Inhalt *oder die* Bedeutung, *auch* Intension, *des Begriffs* β.

◇

Ein Beispiel für einen Begriff im Rahmen des Kontextes 1.1.3 ist

$$(A, B) := (\{\pi\}, \{i, t\}).$$

Mit $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ wollen wir *die Menge aller Begriffe zum Kontext* $\mathcal{K} = (G, M, I)$ bezeichnen, also

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}) := \{(A, B) \mid A \subseteq G, B \subseteq M, A' = B, B' = A\}.$$

Diese Menge können wir hierarchisch anordnen, was der üblichen Einteilung in *Ober- und Unterbegriffe* entspricht. Dazu bemerken wir, daß die Ableitungen antiton sind:

1.1.5 $$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow A_1' \supseteq A_2',\;\; B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow B_1' \supseteq B_2'.$$

Da man in den natürlichen Sprachen als Unterbegriff eines Begriffes β einen spezielleren Begriff als β bezeichnet, also einen, der meist weniger Gegenstände als β umfaßt, dafür aber in der Regel mehr Merkmale als β aufweist, ordnen wir $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ entsprechend an: Für Begriffe $(A_i, B_i) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, mit $i = 1, 2$, sei

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) :\Longleftrightarrow A_1 \subseteq A_2 \ (\Longleftrightarrow B_2 \subseteq B_1).$$

(A_1, B_1) heißt dabei *Unterbegriff* von (A_2, B_2), und entsprechend (A_2, B_2) *Oberbegriff* von (A_1, B_1). Wir erhalten so — wie man unschwer verifiziert (s. Übungsaufgabe 1.1.2) — die geordnete Menge

$$(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \leq).$$

Diese Halbordnung ist ein Verband, sogar ein vollständiger. Wir wollen den Beweis dieses wichtigen Satzes und die Erläuterung der vorkommenden verbandstheoretischen Konzepte aber noch zurückstellen, denn er folgt aus einem allgemeineren Satz, der mit der Kombinatorik der Abbildungen $A \mapsto A'$ und $B \mapsto B'$, also der Ableitungen, zu tun hat. Wir unterbrechen deshalb die Einführung der Begriffsanalyse zugunsten einer Erhellung des kombinatorischen Hintergrundes. Zuvor wollen wir aber noch den Begriffsverband zum ersten obigen Beispiel veranschaulichen um zu zeigen, daß man aus einer bildlichen Darstellung sehr rasch die wichtigsten Aussagen des Kontextes ablesen kann, und auf sogenannte "mehrwertige Kontexte" eingehen, bei denen statt eines Kreuzes auch ein numerischer Wert oder eine sonstige Wertung des betreffenden Merkmals in die Tabelle eingetragen werden kann.

Der Begriffsverband $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ des Kontextes $\mathcal{K}$ wird mit Hilfe seines *Hassediagramms*[3] veranschaulicht. Dessen *Punkte* entsprechen den Begriffen, und jeder Begriff ist durch eine Kante nach oben — also im Grunde genommen durch eine *gerichtete* Kante — mit seinen oberen Nachbarn verbunden. Die Punkte zu den sogenannten *Gegenstandsbegriffen*

$$(g'', g') := (\{g\}'', \{g\}')$$

(dabei steht g' für $\{g\}'$, g'' für $\{g\}''$) werden mit den entsprechenden Gegenstandsnamen g beschriftet, die wir etwas *unterhalb* der Punkte

[3]Nach dem Algebraiker und Zahlentheoretiker Helmut Hasse (1898-1979), Prof. in Halle, Marburg, Göttingen, Berlin und Hamburg, der diese Darstellung 1952 eingeführt hat

notieren. Ein Merkmal m wird dagegen etwas *oberhalb* des zugehörigen *Merkmalsbegriffs*

$$(m', m'') := (\{m\}', \{m\}'')$$

eingetragen (vgl. auch Übungsaufgabe 1.1.1). Das beschriftete Hassediagramm zum Begriffsverband des Kontextes 1.1.3 zeigt Abbildung 1.1.

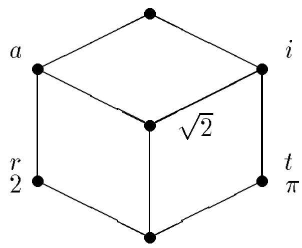


Abbildung 1.1: Der Begriffsverband zum Kontext aus der Algebra

Bei der Erfassung von Datenmaterial bedient man sich in praxi nicht nur der oben bereits erwähnten einfachen $0,1$-Matrizen, sondern reichert sie häufig dadurch an, daß man zusätzlich zur Eintragung von Nullen noch die Eintragung von Wertungen, wie etwa $+, -, ++$ etc., erlaubt oder auch von numerischen Werten — also z.B. rationalen Zahlen — als Ergebnis von Zählungen, Schätzungen, Benotungen oder Messungen. Wir wollen die so modifizierten Kontexte auch *mehrwertig* nennen.

1.1.6 Beispiele (Mehrwertige Kontexte)

- Der Kontext über reelle Zahlen aus 1.1.2 kann auch als mehrwertiger Kontext geschrieben werden, indem man sich nur auf die Merkmale "irrational", "algebraisch" und "transzendent" beschränkt, dafür aber bei "algebraisch" die Eintragung eines n aus $\mathbb{N}$ zuläßt, was "algebraisch vom Grade n" bedeuten soll. Dabei nennen wir wie üblich a $(\in \mathbb{R})$ *algebraisch vom Grade* n, wenn a Nullstelle eines normierten Polynoms aus $\mathbb{Q}[X]$ vom minimalen Grade n $(\in \mathbb{N})$ ist. "Algebraisch vom Grade 1" besagt dann gerade "rational". Die in 1.1.2 behandelte Gegenstandsmenge erweitern wir noch um $\sqrt[3]{2}$ und benutzen Kreuzchen, wenn der Gegenstand irrational oder transzendent ist:

	i	a	t
2		1	
$\sqrt{2}$	×	2	
$\sqrt[3]{2}$	×	3	
π	×		×

- In einer Studentenkartei werden unter dem Namen und Vornamen des einzelnen Studierenden die folgenden Daten in verschiedenen Spalten erfaßt:
  - Die *Fachrichtung* durch Angabe eines Elementes von

    {<u>M</u>athematik, <u>T</u>echnomathematik, <u>I</u>nformatik};
  - Der *Studienbeginn* durch Angabe eines Elementes aus

    {<, WS 91/92, SS 92, WS 92/93,..., WS 96/97, SS 97},

    wobei "<" bedeute, daß das Studium bereits vor dem Wintersemester 1991/92 aufgenommen wurde;
  - Das *Geschlecht* durch Angabe eines der Elemente von

    {<u>w</u>eiblich, <u>m</u>ännlich};
  - Das *Vorexamen* durch Angabe einer Note aus $\{1, 2, 3, 4\}$ oder von -1 für "nicht bestanden".

$\diamond$

Um die Phänomene möglichst allgemein beschreiben und dem Bisherigen angliedern zu können, definieren wir:

1.1.7 Definition (Mehrwertiger Kontext) *Ein* mehrwertiger Kontext *ist ein Quadrupel*

$$\mathcal{M} = (G, M, W, I)$$

aus Mengen G, M und W sowie einer "rechtseindeutigen" ternären Relation I zwischen G, M und W, also $I \subseteq G \times M \times W$ mit

$$(g, m, u), (g, m, v) \in I \Longrightarrow u = v.$$

Die Elemente von G werden Gegenstände *von $\mathcal{M}$ genannt, die von M* Merkmale *von $\mathcal{M}$ und die von W* Werte *oder* Merkmalsausprägungen *von $\mathcal{M}$. $(g,m,w) \in I$ lesen wir als "m hat bei g den Wert w". $\mathcal{M}$ heiße $n-$*wertiger *Kontext im Falle $n = |W|$.*

$\diamond$

Wegen der Rechtseindeutigkeit von I bestimmen g und m jeweils höchstens ein Element von W; daher kann etwa m auch als partielle Funktion von G in W aufgefaßt werden mit

$$m(g) = w \iff (g,m,w) \in I.$$

Im folgenden werden wir gelegentlich von dieser Funktionsauffassung von m stillschweigend Gebrauch machen.

Es ist nun naheliegend, mehrwertige Kontexte wiederum auf — evtl. sehr viel größere — einwertige Kontexte zurückzuführen, um die bewährten Vorgehensweisen zur Strukturierung und Interpretation der Daten mit Hilfe von Begriffsverbänden auch hier einsetzen zu können. Dies kann auf vielerlei Arten geschehen. Wir schildern hier die von der Darmstädter Arbeitsgruppe vorgeschlagene Methode der sog. *Skalierung,* die ein hohes Maß an Flexibilität und Freiheit der subjektiven Interpretation aufweist. Dazu wird jedes Merkmal *problemorientiert* in eine Menge von Merkmalen aufgespalten und ein um diese sogenannten *Skalenwerte* erweiterter einwertiger Kontext gebildet, dessen Inzidenzrelation natürlich so gewählt wird, daß dem ursprünglichen mehrwertigen Kontext angemessen entsprochen wird. Wir exemplifizieren dies an einigen Skalierungen des Kontextes aus der Algebra.

1.1.8 Beispiele (Skalen) Betrachten wir wieder den Kontext

	i	a	t
2		1	
$\sqrt{2}$	$\times$	2	
$\sqrt[3]{2}$	$\times$	3	
π	$\times$		$\times$

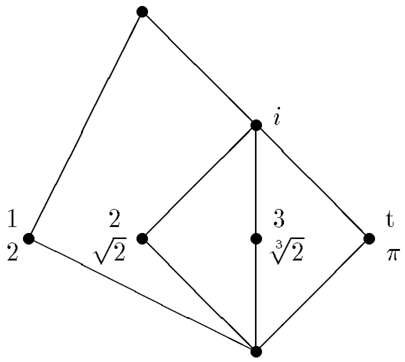
Wir wollen diesem Kontext jetzt einwertige Kontexte zuordnen, indem wir die Merkmalsausprägungen $1, 2$ und 3 des Merkmals "algebraisch" problemorientiert interpretieren:

- Wenn es uns auf den genauen Grad ankommt, dann werden wir natürlich das Merkmal a durch die drei Skalenwerte $1, 2, 3$ ersetzen und erhalten den neuen, jetzt aber einwertigen Kontext

	i	1	2	3	t
2	0	1	0	0	0
$\sqrt{2}$	1	0	1	0	0
$\sqrt[3]{2}$	1	0	0	1	0
π	1	0	0	0	1

.

mit dem zugehörigen Begriffsverband:



.

Diese Vorgehensweise nennt man *Nominalskalierung.* Sie wird zweckmäßigerweise für solche Merkmale benutzt, deren verschiedene Ausprägungen als sich gegenseitig ausschließend aufgefaßt werden sollen. Jedes Merkmal m wird dann durch die Menge von Merkmalsausprägungen

$$M_m := \{w \in W \mid m^{-1}\{w\} \neq \emptyset\}$$

ersetzt. Der neue, nunmehr einwertige, Kontext ist dann

$$(G, \bigcup_{m \in M} \{m\} \times M_m, I'),$$

mit

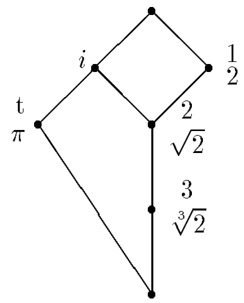
$$gI'(m,w) \iff m(g) = w \;;$$

dabei werden die Paare (m, w) nur gebildet, um die Werte bei verschiedenen Merkmalen als "neue" Merkmale unterscheiden zu können.

- Interpretieren wir die Skalenwerte $n = 1, 2, 3$ dagegen im Sinne von "algebraisch vom Grade $\geq n$", so werden wir besser die folgende Erweiterung nehmen:

	i	1	2	3	t
2	0	1	0	0	0
$\sqrt{2}$	1	1	1	0	0
$\sqrt[3]{2}$	1	1	1	1	0
π	1	0	0	0	1

Diese Skalierung heißt *Ordinalskalierung*, und sie ergibt hier den Begriffsverband



.

Eine solche Skalierung benutzt man, wenn das Bild $m(G)$ des Merkmals m geordnet ist: $(m(G), \leq_m)$, (bzw. $(m(G),_m \geq)$) und wenn $m(g) = w$ so interpretiert werden soll, als impliziere das die "schwächeren Ausprägungen" (die "stärkeren Ausprägungen"). Der zugeordnete einwertige Kontext ist dementsprechend

$$(G, \bigcup_{m \in M} \{m\} \times M_m, I^*),$$

mit

$$gI^*(m, w) \iff m(g) \leq w \ ,$$

bzw.

$$(G, \bigcup_{m \in M} \{m\} \times M_m, I^\#),$$

mit

$$gI^\#(m, w) \iff m(g) \geq w \ .$$

Solche Ordinalskalierungen kann man auch nehmen, wenn die Merkmalsausprägungen *Noten* sind.

- Eine Mischung von beiden Ordinalskalierungen ist die sogenannte *Biordinalskalierung.* Ein gutes Beispiel hierfür ist eine Methode, einen mehrwertigen Kontext mit Schulnoten in einen einwertigen umzuwandeln, indem man die Noten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in zwei Gruppen einteilt, etwa in $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{5, 6\}$. Die Ausprägungen $\{1, 2, 3, 4\}$ werden dazu interpretiert als "4 oder besser", die Ausprägungen $\{5, 6\}$ als "5 oder schlechter".

$\diamond$

Die richtigen Unterstrukturen von Kontexten sind natürlich Kontexte, deren Gegenstands- und Merkmalsmengen Teilmengen der vorgegebenen sind, und deren Inzidenzrelation gerade die Einschränkung ist. Wir definieren dementsprechend:

1.1.9 Definition *Ist $\mathcal{K} = (G, M, I)$ ein Kontext und sind $H \subseteq G$ sowie $N \subseteq M$ Teilmengen der Gegenstands- bzw. der Merkmalsmenge von $\mathcal{K}$, dann heißt $\mathcal{T} := (H, N, J)$* Teilkontext *von $\mathcal{K}$, wenn $J = I \cap H \times N$ ist, die Einschränkung von I auf $H \times N$.*

$\diamond$

Man verifiziert leicht (Übungsaufgabe 1.1.5)

1.1.10 Hilfssatz *Ist $\mathcal{K} = (G, M, I)$ und sind $H \subseteq G$, sowie $N \subseteq M$, dann gilt:*

- *Jeder Begriffsumfang aus $(G, N, I \cap G \times N)$ ist auch Begriffsumfang in $\mathcal{K}$.*
- *Jeder Begriffsinhalt aus $(H, M, I \cap H \times M)$ ist auch Begriffsinhalt in $\mathcal{K}$.*
- *Die Abbildung*

$$\mathcal{B}(G, N, I \cap G \times N) \to \mathcal{B}(\mathcal{K}) \colon (A, B) \mapsto (A, A')$$

ist eine Ordnungseinbettung (d. h. eine ordnungserhaltende injektive Abbildung).

- *Die Abbildung*

$$\mathcal{B}(H, M, I \cap H \times M) \to \mathcal{B}(\mathcal{K}) \colon (A, B) \mapsto (B', B)$$

ist ebenfalls eine Ordnungseinbettung.

- *Ordnungseinbettungen sind auch*

$$\mathcal{B}(H, N, I \cap H \times N) \to \mathcal{B}(\mathcal{K}) \colon (A, B) \mapsto (A'', A'),$$

und

$$\mathcal{B}(H, N, I \cap H \times N) \to \mathcal{B}(\mathcal{K}) \colon (A, B) \mapsto (B', B'').$$

Übungen

Ü 1.1.1 Es ist zu beweisen:

a) $A \subseteq A''$, $B \subseteq B''$;

b) $A''' = A'$, $B''' = B'$

für jede Gegenstandsmenge A und jede Merkmalsmenge B eines Kontextes. Damit zeige man: (A'', A') ist der — bez. $\leq$ — kleinste Begriff, dessen Umfang A enthält, und (B', B'') der kleinste, dessen Inhalt B umfaßt.
Speziell verifiziere man nun, daß die genannten Gegenstands- und Merkmalsbegriffe in der Tat Begriffe sind, und zwar (g'', g') bzw. (m', m'') der kleinste Begriff, der g bzw. m als Gegenstand bzw. als Merkmal enthält.

Ü 1.1.2 Man zeige, daß $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \leq)$ eine geordnete Menge ist.

Ü 1.1.3 Für jeden Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ zeige man:

$$1 \leq |\mathcal{B}(\mathcal{K})| \leq 2^{|G|}$$

und diese Schranken sind "scharf", d. h. es gibt Kontexte, bei denen sie angenommen werden, sogar zu jedem G.

Ü 1.1.4 Zu dem Kontext nach Aristoteles und zu dem Kontext über Sitzmöbel zeichne man das jeweilige Hassediagramm des Begriffsverbandes. (Man bestimme zunächst sämtliche Gegenstands- und Merkmalsbegriffe!)

Ü 1.1.5 Verifizieren Sie 1.1.10.

1.2 Abzählen von Kontexten

Ein endlicher (einwertiger) Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ kann je nach Numerierung auf vielerlei Weise als 0-1-Matrix dargestellt werden, nämlich durch jede 0-1-Matrix, die aus einer bestimmten zunächst $\mathcal{K}$ zugeordneten durch beliebige Zeilen- oder[4] Spaltenpermutation hervorgeht, was auf $|G|! \cdot |M|!$ Arten möglich ist. Für das konkrete Arbeiten mit Kontexten — etwa auch für eine handliche Darstellung in einem Computer — sind wir aber stets auf eine bestimmte Reihenfolge der Gegenstände und Merkmale angewiesen. Daher bezeichnen wir solche 0-1-Matrizen als *äquivalent,* wenn sie durch geeignete Zeilen- oder Spaltenpermutation ineinander übergehen. Um diese Übergänge mathematisch adäquat beschreiben und später auch entsprechende Anzahlen von Kontexten explizit bestimmen zu können, betrachten wir die Wirkung solcher Permutationen genauer, d. h. wir werden uns im folgenden mit dem Operieren von Permutationsgruppen, also Gruppen von Permutationen, allgemeiner von beliebigen Gruppen auf einer Menge beschäftigen.

Eine *Operation* einer Gruppe Γ auf einer Menge X ist eine Abbildung

$$\Gamma \times X \to X\colon (\gamma, x) \mapsto \gamma x \text{ mit } \gamma(\gamma' x) = (\gamma\gamma')x \text{ und } 1x = x$$

für alle $\gamma, \gamma' \in \Gamma, x \in X$ und das neutrale Element 1 der multiplikativ geschriebenen Gruppe Γ. Eine solche Operation wollen wir abkürzend auch mit

$$_{\Gamma}X$$

bezeichnen. Sind sowohl Γ als auch X endlich, dann sprechen wir von einer *endlichen Operation.* Ein triviales Beispiel ist die natürliche Operation der *symmetrischen Gruppe*

$$S_X := \{\pi \mid \pi : X \to X, \pi \text{ bijektiv}\},$$

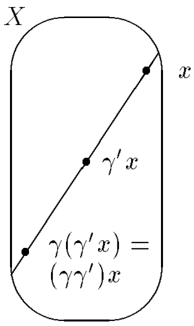
der Menge aller Permutationen von X, bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung:

$$S_X \times X \to X\colon (\pi, x) \mapsto \pi x,$$

[4] Wir benutzen "oder" hier und im folgenden, wie in mathematischen Texten üblich, im Sinne des "nichtausschließenden Oders", also des lateinischen "vel", wofür leider oft das unschöne "und/oder" geschrieben wird!

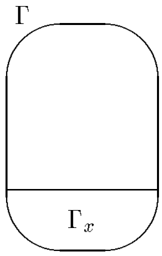
mit $\pi x := \pi(x)$. Unsere wichtigsten Beispiele sind natürlich die Kontexte zu vorgegebenen Gegenstands- und Merkmalsmengen. Zwei Kontexte sind, wie gesagt, gleich, wenn ihre Inzidenzmatrizen durch Permutationen der Zeilen oder der Spalten auseinander hervorgehen, und diese Permutationen können wir mit einer Operation des direkten Produkts $S_G \times S_M$ der symmetrischen Gruppen auf Gegenstands- und Merkmalsmenge auf einer geeigneten Menge von Abbildungen identifizieren. Dazu benötigen wir aber noch einige mathematische Konzepte, die in diesem Zusammenhang tragende Rollen spielen.

Eine Operation ${}_\Gamma X$ definiert wichtige Teilstrukturen auf X und Γ:



- Zu jedem $x \in X$ gehört einerseits seine *Bahn*, das ist die folgende Teilmenge von X:
$$\Gamma(x) := \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

- Die Menge aller Bahnen sei
$$\Gamma\backslash\backslash X := \{\Gamma(x) \mid x \in X\}.$$



- Andererseits gehört zu $x \in X$ sein *Stabilisator*, das ist die folgende Untergruppe (Aufgabe 1.2.2) von Γ:
$$\Gamma_x := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma x = x\}.$$

- Zu jedem $\gamma \in \Gamma$ gehört die Menge seiner *Fixpunkte*:
$$X_\gamma := \{x \in X \mid \gamma x = x\}.$$

Viele Strukturen aus Mathematik und Naturwissenschaften lassen sich als Bahnen, Stabilisatoren oder Fixpunktmengen definieren und werden dadurch einer Untersuchung mit Hilfe der im folgenden beschriebenen Methoden zugänglich. Aus der Fülle möglicher Exempel nennen wir hier nur einige wenige:

1.2.1 Beispiele

a) Bei jedem Vektorraum V operiert die multiplikative Gruppe $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$ des Skalarkörpers $\mathbb{K}$ auf V : Die Bahn eines vom Nullvektor 0 verschiedenen Vektors x ($\in V$) ist genau die Menge seiner nichtverschwindenden Vielfachen, also

$$\mathbb{K}^*(x) = \{\kappa x \mid \kappa \in \mathbb{K}^*\};$$

für den Stabilisator gilt

$$\mathbb{K}_0^* = \mathbb{K}^*, \text{ und } \mathbb{K}_x^* = \{1\}, \text{ für } x \in V\backslash\{0\}.$$

Die Fixpunktmenge von 1 ist

$$V_1 = \{x \in V \mid 1x = x\} = V,$$

und die von κ aus $\mathbb{K}^*\backslash\{1\}$ entsprechend $V_\kappa = \{0\}$.

b) S_X operiert, wie gesagt, auf der Menge X : Die Bahn von x aus X unter S_X ist X und sein Stabilisator isomorph zu $S_{X\backslash\{x\}}$, also

$$S_X(x) = X \text{ und } (S_X)_x \simeq S_{X\backslash\{x\}}.$$

c) Die längentreuen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ auf sich, also die Isometrien oder Bewegungen, bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung bekanntlich eine Gruppe Γ, die auf $\mathbb{R}^n$ operiert. Wir beschränken uns hier einfachheitshalber auf den Fall $n = 2$, unsere Anschauungsebene $E := \mathbb{R}^2$.

Die Bahn eines Punktes P aus E unter Γ ist ganz E, und der Stabilisator von P die Untergruppe von Γ, die aus den Drehungen um P und den Spiegelungen mit Achse durch P besteht. — Ist σ eine Spiegelung aus Γ, so E_σ gerade die Spiegelungsachse.

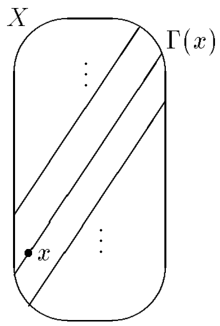
Geometrie und Topologie bieten noch eine Vielzahl weiterer Abbildungsgruppen, die in ähnlicher Weise auf den entsprechenden Räumen operieren, wie etwa Kollineationen, Affinitäten, Ähnlichkeiten oder Homöomorphismen.

d) Mitunter ist es nützlich, die Verknüpfung einer Gruppe Γ als Operation von Γ auf Γ aufzufassen, so etwa beim Beweis des Satzes von Cayley, daß jede Gruppe isomorph zu einer Gruppe von Permutationen ist, oder beim Wielandtschen Beweis der Sätze von Sylow (vgl. [21], auch [14],[12]).

$\diamond$

Die herausragenden Eigenschaften von Operationen, Bahnen und Stabilisatoren fassen wir im folgenden Hilfssatz zusammen, dessen einzelne Punkte man nacheinander leicht herleiten kann (Übungsaufgabe 1.2.1):

1.2.2 Hilfssatz *Operiert Γ auf X, dann gilt:*



- *Für $\gamma \in \Gamma, x, x' \in X$ ist $\gamma x = x'$ äquivalent zu $x = \gamma^{-1}x'$.*
- *Bahnen $\Gamma(x)$ und $\Gamma(x')$ sind entweder gleich oder disjunkt. Eine* Transversale, *d. h. ein vollständiges Repräsentantensystem, T der Menge aller Bahnen liefert also eine Partition von X:*

$$X = \bigcup_{t \in T} \Gamma(t).$$

Als kleine Anwendung dieses Hilfssatzes beweisen wir: In der Menge $\mathbb{N}^*$ der positiven ganzen Zahlen haben genau die Quadratzahlen ungeradzahlig viele Teiler.
Sei nämlich T die Menge der (positiven) Teiler von n aus $\mathbb{N}^*$ und $\tau : T \to T$ definiert durch

$$\tau := t \mapsto \frac{n}{t}.$$

Dann operiert die Gruppe $\Delta := \{1, \tau\}$ mit 1 als der identischen Abbildung von T auf T. Für die Bahn $\Delta(t) = \{t, \frac{n}{t}\}$ von t ($\in T$) gilt $|\Delta(t)| = 2$, es sei denn $t = \frac{n}{t}$; und dies ist mit $n = t^2$ gleichbedeutend. Da Bahnen disjunkt sind, gibt es also genau dann einen Fixpunkt von τ, wenn n ungeradzahlig viele Teiler besitzt, und dies ist gleichbedeutend damit, daß n Quadrat ist.

Die Gruppenoperation ${}_\Gamma X$ induziert also eine Äquivalenzrelation auf X, deren Klassen die Bahnen sind. Darüberhinaus besteht ein ganz enger und sehr wichtiger Zusammenhang zwischen einer Bahn und dem Stabilisator irgendeines ihrer Elemente. Diese Beziehung ist die Grundlage für alle Anwendungen von Gruppenoperationen:

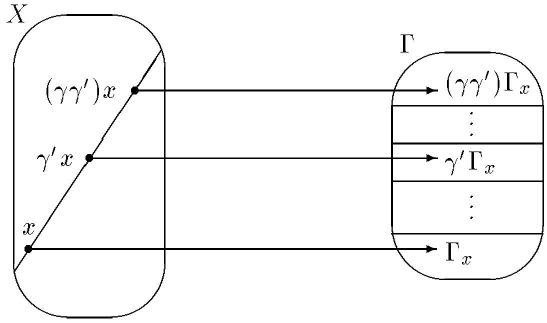
1.2.3 Satz *Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung*

$$\varphi : \Gamma(x) \to \Gamma/\Gamma_x : \gamma x \mapsto \gamma\Gamma_x$$

eine Bijektion zwischen der Bahn $\Gamma(x)$ und der Menge

$$\Gamma/\Gamma_x = \{\gamma\Gamma_x \mid \gamma \in \Gamma\}$$

der Linksnebenklassen des Stabilisators von x.



Beweis: Wir betrachten die folgende offensichtlich gültige Kette von Äquivalenzen (vgl. 1.2.2, Punkt 1, und Aufgabe 1.2.1):

$$\gamma x = \gamma' x \iff \gamma^{-1}\gamma' x = x \iff \gamma^{-1}\gamma' \in \Gamma_x \iff \gamma\Gamma_x = \gamma'\Gamma_x .$$

Liest man diese Zeile von links nach rechts, so zeigt sich, daß φ eine wohldefinierte Abbildung ist. Liest man in umgekehrter Richtung, so folgt die Injektivität von φ, die Surjektivität ist trivial.

□

Diese Bijektion ist zudem mit der Gruppenoperation vertauschbar:

$$\varphi(\gamma x) = \gamma\Gamma_x = \gamma\varphi(1x) = \gamma\varphi(x),$$

d. h. zwischen der Operation ${}_\Gamma(\Gamma(x))$ von Γ auf $\Gamma(x)$ und der Operation

$$\Gamma \times (\Gamma/\Gamma_x) \to (\Gamma/\Gamma_x) : (\gamma, \gamma'\Gamma_x) \mapsto \gamma\gamma'\Gamma_x ,$$

von Γ auf Γ/Γ_x existiert eine mit der Operation verträgliche Bijektion, ein sogenannter Γ-*Isomorphismus.* Diese beiden Operationen können deshalb als im wesentlichen gleich angesehen werden, was wir so abkürzend kennzeichnen wollen:

1.2.4 $$_\Gamma(\Gamma(x)) \approx {}_\Gamma(\Gamma/\Gamma_x).$$

Die *Länge* der Bahn $\Gamma(x)$, i. e. $|\Gamma(x)|$, ist demnach gleich der Anzahl der Nebenklassen des Stabilisators von x; man nennt diese Zahl den *Index* des Stabilisators. Im endlichen Fall ist diese Bahnlänge gleich dem Quotienten aus Gruppen- und Stabilisatorordnung, was eine sehr einschneidende Bedingung an die Bahnlängen darstellt:

1.2.5 $$|\Gamma(x)| = \frac{|\Gamma|}{|\Gamma_x|}.$$

Wir haben gesehen, daß viele Strukturen als Bahnen endlicher Gruppen auf endlichen Mengen definiert werden können. Gleich werden wir in der Lage sein, Kontexte als Bahnen einzuführen. Unser Ziel ist die Konstruktion dieser Strukturen, also die Bestimmung eines Repräsentantensystems dieser Bahnen. Auf dem Weg dahin (der oft sehr weit ist, selbst unter Verwendung moderner Rechenanlagen) betrachten wir in einem Zwischenschritt die Bestimmung der *Anzahlen* solcher Bahnen, und zwar nicht nur der *Gesamtanzahl*, sondern auch der Anzahl der Bahnen, deren Elemente fest vorgegebene Parameter haben. Beispielsweise werden wir die Gesamtanzahl der wesentlich verschiedenen Kontexte mit gegebenen Anzahlen von Gegenständen und Merkmalen angeben können, aber auch die Anzahl der wesentlich verschiedenen Kontexte mit gegebenen Anzahlen von Gegenständen und Merkmalen *sowie* mit gegebener Anzahl von Einsen. Solche Anzahlen sind für sich selbst interessant, und sie dienen als *Abbruchkriterien* bei der Konstruktion. Zunächst also die Gesamtzahl der Bahnen, sie folgt aus dem

1.2.6 Lemma von Cauchy–Frobenius [5] *Für endliche Operationen*

[5] Augustin-Louis Baron Cauchy (21.VIII.1789–23.V.1857), Ingenieur und bedeutender Mathematiker, Professor an der Ecole polytechnique, an der Sorbonne, am Collège de France und in Turin, Akademiemitglied und Prinzenerzieher in Prag; enorm produktiv, Gesamtwerk 27 Bände. — Das Lemma findet sich für den *transitiven* Fall, d. h. $|\Gamma \backslash\!\backslash X| = 1$, in "Memoire sur diverses propriétés remarquables des substitutions conjugées (suite). C.R. Acad. Sci. Paris, **21** (1843), S. 972-987."

${}_\Gamma X$ *gilt:*

$$|\Gamma\backslash\!\backslash X| = \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}|X_\gamma|.$$

Beweis: Wir schreiben die Summe als Doppelsumme, vertauschen die Summationen und benutzen 1.2.5:

$$\sum_\gamma |X_\gamma| = \sum_\gamma \sum_{x\in X_\gamma} 1 = \sum_x \sum_{\gamma\in\Gamma_x} 1 = \sum_x |\Gamma_x|$$

$$=_{1.2.5} |\Gamma|\cdot\sum_x \frac{1}{|\Gamma(x)|} = |\Gamma|\cdot|\Gamma\backslash\!\backslash X|.$$

Die letzte Gleichung folgt, weil jede Bahn zu der Summe denselben Beitrag 1 leistet.

□

Betrachten wir als relativ allgemeines Beispiel, und zur Vorbereitung der Abzählung der Kontextklassen, die Bestimmung der Anzahl der Bahnen einer Gruppe Γ auf der Menge

$$Y^X := \{f \mid f\colon X \to Y\}$$

aller Abbildungen zwischen zwei endlichen Mengen — die Reihenfolge ist ja bekanntlich wegen $|Y^X| = |Y|^{|X|}$ so gewählt! —, wobei auf X die Gruppe Γ operiert (d. h. es ist eine Abbildung $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$ mit den geforderten Eigenschaften definiert). Daraus ergibt sich auf natürliche Weise die folgende Operation von Γ auf der Menge der Abbildungen von X nach Y :

1.2.7 $\quad \Gamma \times Y^X \to Y^X\colon (\gamma, f) \mapsto f\circ\gamma^{-1},\ f\circ\gamma^{-1}(x) := f(\gamma^{-1}x).$

Die Bahnen dieser Operation heißen auch *Symmetrieklassen* von Γ auf Y^X. Zur Bestimmung ihrer Anzahl, d. h. zur Anwendung des Lemmas von Cauchy–Frobenius auf dieses Problem, benötigen wir die Anzahl der Fixpunkte von $\gamma \in \Gamma$. Eine Abbildung $f \in Y^X$ ist genau dann ein solcher Fixpunkt, wenn sie konstant auf den Bahnen der von γ erzeugten zyklischen Gruppe $\langle\gamma\rangle$ ist (s. Aufgabe 1.2.4). Das ergibt

$$|\{f \in Y^X \mid f\circ\gamma^{-1} = f\}|$$

Ferdinand Georg Frobenius (16.X.1849–3.VIII.1917), Professor in Zürich und Berlin, Akademiemitglied; Gruppentheoretiker. — Das Lemma erschien in "Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. Crelles J., **101** (1887), S. 273-299."

$$= |\{f \in Y^X \mid \forall\, x \in X\colon f \text{ ist konstant auf } \langle\gamma\rangle(x)\}| = |Y^{\langle\gamma\rangle \backslash\!\backslash X}|$$

und mit dem Lemma von Cauchy–Frobenius daher insgesamt:

1.2.8 $$|\Gamma \backslash\!\backslash Y^X| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} |(Y^X)_\gamma| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} |Y|^{|\langle\gamma\rangle \backslash\!\backslash X|}.$$

Einen Spezialfall bilden die Kontextklassen. Ein einwertiger Kontext (G, M, I) kann ja als Abbildung von $G \times M$ in die Menge $\{0, 1\}$ aufgefaßt werden, also

$$(G, M, I) \in \{0, 1\}^{G \times M}.$$

Für mehrwertige Kontexte haben wir entsprechend:

$$(G, M, W, I) \in (W \cup \{0\})^{G \times M}.$$

Damit kommen wir zu der für uns sehr wichtigen Definition:

1.2.9 Definition (Kontextklasse) *Eine* Kontextklasse *(einwertiger Kontexte) zur Gegenstandsmenge G und Merkmalsmenge M ist eine Bahn des direkten Produkts $S_G \times S_M$ auf der Menge der Abbildungen*

$$\{0, 1\}^{G \times M}.$$

Die Menge aller wesentlich verschiedenen einwertigen *Kontexte auf $G \times M$ kann entsprechend mit*

$$S_G \times S_M \backslash\!\backslash \{0, 1\}^{G \times M}$$

identifiziert werden.
Die Menge aller wesentlich verschiedenen mehrwertigen *Kontexte mit G, M und Wertemenge W läßt sich entsprechend mit*

$$S_G \times S_M \backslash\!\backslash (W \cup \{0\})^{G \times M}$$

identifizieren.

Daraus erhalten wir, unter Verwendung von 1.2.8:

1.2.10 Folgerung *Die Anzahl der Klassen einwertiger Kontexte auf $G \times M$ ist*

$$\frac{1}{|G|!|M|!} \sum_{(\alpha,\beta) \in S_G \times S_M} 2^{|\langle(\alpha,\beta)\rangle \backslash\!\backslash G \times M|}.$$

Die Anzahl mehrwertiger Kontexte auf $G \times M$ mit Wertemenge W ist

$$\frac{1}{|G|!|M|!} \sum_{(\alpha,\beta)\in S_G\times S_M} (|W|+1)^{|\langle(\alpha,\beta)\rangle\backslash\backslash G\times M|}.$$

Zur Anwendung dieser Folgerung bedarf es noch der Angabe der Anzahl $|\langle(\alpha,\beta)\rangle\backslash\backslash G \times M|$ von Bahnen. Hierzu überlegt man sich leicht (Übungsaufgabe 1.2.5), wie sich die *Längen* der Bahnen der von $(\alpha,\beta) \in S_G \times S_M$ erzeugten Gruppe auf $G \times M$ aus den Bahnlängen der von den Komponenten erzeugten Gruppen ergeben:

1.2.11 Hilfssatz *Sei $(g,m) \in G\times M$, und $(\alpha,\beta) \in S_G\times S_M$. Der Gegenstand g liege in einer Bahn der Länge i, bezogen auf die Operation der von α erzeugten Untergruppe $\langle\alpha\rangle$, das Merkmal m unter $\langle\beta\rangle$ in einer Bahn der Länge k. Dann liegt (g,m) in einer Bahn der Länge $kgV(i,k)$. Insgesamt ergeben sich auf diese Weise aus den $b_i(\alpha)$ Bahnen der Länge i von α und den $b_k(\beta)$ Bahnen der Länge k von β genau*

$$ggT(i,k)\cdot b_i(\alpha)\cdot b_k(\beta)$$

Bahnen der (gleichen) Länge $kgV(i,k)$. Die gesuchte Bahnenanzahl genügt also der folgenden Gleichung:

$$|\langle\alpha,\beta\rangle\backslash\backslash G\times M| = \sum_{j=1}^{|G\times M|} \sum_{(i,k):kgV(i,k)=j} ggT(i,k)\cdot b_i(\alpha)\cdot b_k(\beta).$$

□

Damit erhält man beispielsweise die folgende Tabelle von Anzahlen von Kontextklassen ([22]):

$\|G\|\backslash\|M\|$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	7	13	22	34	50	70	95
3	4	13	36	87	190	386	734	1324
4	5	22	87	317	1053	3250	9343	25207
5	6	34	190	1053	5624	28576	136758	613894
6	7	50	386	3250	28576	251610	2141733	17256831

Eine weitere sehr nützliche Folgerung aus 1.2.3 ermöglicht eine Identifizierung von Bahnenrepräsentanten mit Repräsentanten von *Doppelnebenklassen;* sie ist für konstruktive Zwecke von großer Wichtigkeit.

1.2.12 Folgerung *Ist* $_{\Gamma}X$ *eine* transitive Operation *(d. h.* X *ist die einzige Bahn), dann ist für jede Untergruppe* U *von* Γ *und jedes* $x \in X$ *die folgende Abbildung eine Bijektion zwischen der Menge der Bahnen von* U *und der Menge*

$$U\backslash\Gamma/\Gamma_x := \{U\gamma\Gamma_x \mid \gamma \in \Gamma\}$$

der (U, Γ_x)*-Doppelnebenklassen in* Γ *:*

$$U\backslash\!\backslash X \to U\backslash\Gamma/\Gamma_x : U(\gamma x) \mapsto U\gamma\Gamma_x.$$

□

Eine leichte aber sehr wichtige Verfeinerung des Lemmas von Cauchy–Frobenius erlaubt die Berechnung der Anzahl der Bahnen mit vorgegebenem *Gewicht,* z. B. der Klassen von Kontexten mit vorgegebener Anzahl von Einsen:

1.2.13 Lemma von Cauchy–Frobenius, gewichtete Form *Ist* $_{\Gamma}X$ *eine endliche Operation,* $\omega : X \to R$ *eine Abbildung von* X *in einen kommutativen Ring* R*, der* $\mathbb{Q}$ *als Teilring enthält, und ist* ω *konstant auf den Bahnen von* Γ*, dann gilt für die Summe der Gewichte der Elemente einer Transversalen* T *der Bahnenmenge* $\Gamma\backslash\!\backslash X$ *folgendes:*

$$\sum_{t \in T} \omega(t) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in X_\gamma} \omega(x).$$

Der Beweis verläuft ganz analog dem Beweis der *konstanten Form* 1.2.6 des Lemmas. Die Verfeinerung kann man mit Hilfe der folgenden Gewichtung auf Symmetrieklassen anwenden, wobei die Gewichtsfunktion eine Abbildung in den Ring $\mathbb{Q}[Y]$ der Polynome in den Unbestimmten $y \in Y$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist:

1.2.14 $$\omega : Y^X \to \mathbb{Q}[Y] : f \mapsto \prod_{x \in X} f(x).$$

Die Funktion f wird also auf das Monom

$$\prod_{y \in Y} y^{|f^{-1}(y)|}$$

abgebildet, und 1.2.13 ergibt die folgende Gleichung für die Summe der Gewichte der Elemente einer Transversalen T *der Symmetrieklassen von Abbildungen*:

$$\sum_{t\in T}\omega(t)=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{f\in(Y^X)_\gamma}\omega(f).$$

Es bleibt also die innere Summe von Gewichten zu bestimmen. Da eine Funktion f unter γ genau dann fest bleibt, wenn sie auf den Bahnen von $\langle\gamma\rangle$ konstant ist, gilt

1.2.15
$$\sum_{f\in(Y^X)_\gamma}\omega(f)=\prod_{i=1}^{|X|}\left(\sum_{y\in Y}y^i\right)^{|\langle\gamma\rangle\backslash\!\backslash_i X|},$$

wobei $|\langle\gamma\rangle\backslash\!\backslash_i X|$ die Anzahl der Bahnen der Länge i von $\langle\gamma\rangle$ auf X bedeute. Wir erhalten demnach die gewünschte Summe der Gewichte der Elemente einer Transversalen der Symmetrieklassen, indem wir in dem sogenannten *Zykelindex* $Z(\Gamma,X)$ der Operation von Γ auf X

$$Z(\Gamma,X)=\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\prod_{i=1}^{|X|}z_i^{|\langle\gamma\rangle\backslash\!\backslash_i X|},$$

die Unbestimmte z_i durch die Potenzensumme $\sum_y y^i$ ersetzen. Diese Ersetzung der Unbestimmten z_i durch die Potenzsummen kürzen wir in folgender Weise ab:

$$Z(\Gamma,X\mid\sum_{y\in Y}).$$

Insgesamt haben wir damit das folgende wichtige Resultat bewiesen:

1.2.16 Der Satz von Pólya [6] *Für die Summe der Gewichte (multiplikatives Gewicht nach 1.2.14) einer Transversalen T der Symmetrieklassen von Abbildungen $f\in Y^X$ unter der von einer Operation*

[6] Georg Pólya (13.XII.1887– 7.IX.1985), ungarischer Mathematiker, Professor an der ETH in Zürich, dann in Stanford und an anderen amerikanischen Universitäten; seine Hauptarbeitsgebiete waren Analysis, Funktionentheorie, Kombinatorik und Didaktik. — Die hier skizzierte Theorie, die sogenannte Pólyasche Abzählungstheorie, hatte er i. w. bereits Mitte der Dreißiger entwickelt: “Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. Acta. Sci. Math., **68** (1937), S. 145-254.”; s. auch [16].

${}_{\Gamma}X$ auf Y^X induzierten Operation gilt die Gleichung

$$\sum_{f \in T} \omega(f) = Z(\Gamma, X \mid \sum_{y \in Y} y).$$

Mit anderen Worten: Die Anzahl der Bahnen von Γ auf Y^X, deren Elemente f genau m_y-mal den Wert $y \in Y$ annehmen, ist der Koeffizient des Monoms

$$\prod_{y \in Y} y^{m_y}$$

in dem Polynom $Z(\Gamma, X \mid \sum_{y \in Y} y)$.

Damit können wir Kontexte nach Gewicht abzählen, einwertige und mehrwertige. Die erzeugende Funktion der gewünschten Anzahlen erhalten wir aus dem Zykelindex

$$Z(S_G \times S_M, G \times M)$$

durch entsprechende Einsetzungen. Hier ist, als Beispiel, der Zykelindex von $S_G \times S_M$, für dreielementige Mengen G und M behandelt. Wir setzen diese dreielementigen Mengen G und M einfachheitshalber gleich und nehmen $G = M := \underline{3}$ (wobei wir hier und im folgenden stets $\underline{n}$ für die Menge $\{1, \ldots, n\}$ der ersten n positiven ganzen Zahlen schreiben). Die Berechnung dieses Beispiels kann mit Hilfe des Computeralgebrapakets SYMMETRICA[7] erfolgen. Als Eingabe nehmen wir vier erzeugende Elemente von $S_{\underline{3}} \times S_{\underline{3}}$, also einer Untergruppe von $S_{\underline{3} \times \underline{3}}$. Dazu müssen wir die Elemente der Menge $\underline{3} \times \underline{3}$ noch durchnumerieren, das tun wir lexikographisch, von 1 bis 9:

1	$(1,1)$	4	$(2,1)$	7	$(3,1)$
2	$(1,2)$	5	$(2,2)$	8	$(3,2)$
3	$(1,3)$	6	$(2,3)$	9	$(3,3)$

Den Erzeugenden

$$((12), 1), ((23), 1), (1, (12)), (1, (23)) \in S_{\underline{3}} \times S_{\underline{3}}$$

entsprechen dann die Permutationen (in Listenschreibweise)

$$[456123789], [123789456], [213546879], [132465798].$$

[7] SYMMETRICA ist "public domain" und kann von http://www.mathe2.uni-bayreuth.de bezogen werden.

Diese kann man als Eingabe für ein geeignetes SYMMETRICA-Programm verwenden und erhält als Ergebnis den Zykelindex dieser Gruppe:

$$1/3\ cf\ \ +2/9\ c^3\ \ +1/4\ ab^4\ \ +1/6\ a^3b^3\ \ +1/36\ a^9$$

(SYMMETRICA verwendet die ersten Buchstaben $a, b, \ldots$ des Alphabets anstelle der Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots$.) Ein Resultat, das man mit etwas Zeit und Mühe auch direkt aus der Definition des Zykelindex "von Hand" hätte gewinnen können. Will man damit Kontextklassen abzählen, so hat man also a durch $\sum_y y$, b durch $\sum_y y^2$ usw. zu ersetzen. In allen Fällen, d. h. bei einwertigen wie bei mehrwertigen Kontexten, kann man sich die Rechnung noch dadurch vereinfachen, daß man die dem Y-Wert 0 zugeordnete Unbestimmte durch die Konstante 1 ersetzt. Bei einwertigen Kontexten hat man dann z_i einfach durch $1 + y^i$ zu ersetzen.
Im Falle, daß Gegenstands- und Merkmalsmenge aus 5 Elementen bestehen, ergibt sich als Zykelindex

$$\begin{gathered}
\frac{1}{15}z_{10}z_{15}+\frac{1}{10}z_5z_{20}+\frac{1}{20}z_5z_{10}^2+\frac{1}{15}z_5^2z_{15}+\frac{1}{30}z_5^3z_{10}+\frac{13}{300}z_5^5+\frac{1}{12}z_2z_3z_4^2z_{12} \\
+\frac{1}{36}z_2^2z_3^3z_6^2+\frac{1}{18}z_2^2z_3^5z_6+\frac{1}{24}z_2^5z_3z_6^2+\frac{1}{36}z_2^5z_3^3z_6+\frac{1}{360}z_2^5z_3^5+\frac{1}{16}z_1z_4^6 \\
+\frac{1}{16}z_1z_2^2z_4^5+\frac{1}{64}z_1z_2^{12}+\frac{1}{12}z_1^2z_3z_4^2z_{12}+\frac{1}{24}z_1^2z_2^4z_3z_6^2+\frac{1}{24}z_1^3z_2z_4^5 \\
+\frac{1}{48}z_1^3z_2^{11}+\frac{1}{36}z_1^4z_3^7+\frac{1}{240}z_1^5z_4^5+\frac{1}{480}z_1^5z_2^{10}+\frac{1}{36}z_1^6z_2^2z_3^3z_6 \\
+\frac{1}{144}z_1^9z_2^8+\frac{1}{360}z_1^{10}z_3^5+\frac{1}{720}z_1^{15}z_2^5+\frac{1}{14400}z_1^{25}.
\end{gathered}$$

Setzt man beispielsweise in diesen Zykelindex von $S_G \times S_M$, mit $|G| = |M| = 5$, das Polynom $1 + y$ ein, so erhält man den Ausdruck (auch diese Einsetzung kann man mittels SYMMETRICA leicht berechnen):

$$\begin{gathered}
y^{25}+y^{24}+3y^{23}+6y^{22}+16y^{21}+34y^{20}+69y^{19}+130y^{18}+234y^{17}+367y^{16} \\
+527y^{15}+669y^{14}+755y^{13}+755y^{12}+669y^{11}+527y^{10}+367y^9 \\
+234y^8+130y^7+69y^6+34y^5+16y^4+6y^3+3y^2+y^1+y^0.
\end{gathered}$$

Hier zeigt der Koeffizient 367 von y^9 an, daß es genau 367 verschiedene Klassen fünfreihiger Kontexte gibt mit 9 Einsen und 16 Nullen.

(Dieses Polynom ist, wie man sieht, *unimodal,* d. h. die Koeffizienten steigen bis zur Mitte an und fallen dann wieder ab. Man kann zeigen, daß dies für jede derartige Einsetzung eines unimodalen Polynoms mit natürlichen Koeffizienten in Zykelindizes richtig ist! Die Symmetrie der Koeffizienten dagegen ist trivial, man erhält sie durch Vertauschen der Einträge 0 und 1.)

Übungen

Ü 1.2.1 Beweisen Sie 1.2.2.

Ü 1.2.2 Zeigen Sie, daß Γ_x wirklich eine Untergruppe von Γ ist.

Ü 1.2.3 Zeigen Sie, daß man den Ausdruck für die Gesamtanzahl der Bahnen im Lemma von Cauchy-Frobenius noch vereinfachen kann. Beweisen Sie dazu

$$|X_\gamma| = |X_{\gamma'\gamma\gamma'^{-1}}|,$$

d. h. daß die Anzahl der Fixpunkte für alle Elemente einer Konjugiertenklasse der operierenden Gruppe gleich ist.

Ü 1.2.4 Zeigen Sie, daß $f \in Y^X$ genau dann ein Fixpunkt von $\gamma \in \Gamma$ ist,wenn f auf jeder Bahne von $\langle\gamma\rangle$ konstant ist.

Ü 1.2.5 Beweisen Sie den Hilfssatz 1.2.11.

Ü 1.2.6 Man verifiziere 1.2.12 in allen Einzelheiten.

Ü 1.2.7 Führen Sie den Beweis der gewichteten Form des Lemmas von Cauchy-Frobenius 1.2.13 in allen Einzelheiten durch.

Ü 1.2.8 Drücken Sie die Anzahl der Bahnen $\Gamma\backslash\!\backslash Y^X$ mit Hilfe des Zykelindex $Z(\Gamma, X)$ und $|Y|$ aus.

1.3 Konstruktion und Zufallserzeugung

Als nächstes seien einige Bemerkungen zur Konstruktion ein- oder mehrwertiger Kontexte zusammengestellt. Dabei geht es nicht um die direkte Berechnung eines Systems von Repräsentanten, denn sie würde schnell an der enormen Größe

$$|W \cup \{0\}|^{|G||M|}$$

der Menge aller Kontexte mit gegebener Gegenstands- und Merkmalsmenge scheiteren. Vielmehr betrachten wir i. a. wesentlich kleinere Mengen, nämlich die Kontexte mit gleichem, in 1.2.14 gegebenem, Gewicht. Mit anderen Worten, wir geben die Vielfachheiten

$$|\mathcal{K}^{-1}(w)|$$

an, mit denen ein Kontext, aufgefaßt als Abbildung von $G \times M$ in $W \cup \{0\}$, die Werte $w \in W$ annimmt. Die Menge *aller* Kontexte mit demselben Gewicht wie $\mathcal{K}$, im Sinne von 1.2.14,wollen wir mit

$$(W \cup \{0\})_{\mathcal{K}}^{G \times M}$$

bezeichnen. Es geht also jetzt um die Berechnung eines Repräsentantensystems der Kontextklassen, die in dieser Teilmenge liegen!
Eine Methode, die — in verfeinerter Form — hierfür schon benutzt worden ist, basiert auf der Verwendung von 1.2.12, wo eine Abbildung einer Bahnenmenge auf eine Menge von Doppelnebenklassen angegeben wurde. Ausgangspunkt war die Vorgabe einer auf der Grundmenge *transitiven* Gruppe; eine solche können wir hier sehr leicht angeben: Da die Vielfachheiten $|\mathcal{K}^{-1}(w)|$ der $w \in W$ beim Permutieren von Argumenten $(g, m) \in G \times M$ invariant bleiben, *operiert die symmetrische Gruppe $S_{G\times M}$ transitiv auf dieser Menge,* und wir erhalten aus 1.2.12 die gesuchte Bijektion auf eine Menge von Doppelnebenklassen, wenn wir noch bemerken, daß der Stabilisator von $\mathcal{K}$ die folgende Gestalt hat

$$(S_{G\times M})_{\mathcal{K}} = \bigoplus_{w \in W \cup \{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)},$$

denn er besteht ja aus den Permutationen auf dem Definitionsbereich, die nur sollche Argumente permutieren, auf denen die Abbildung denselben Wert hat. Aus 1.2.12 ergibt sich nämlich jetzt die

1.3.1 Folgerung *Die Menge der Kontextklassen desselben Gewichts wie $\mathcal{K}$, also die Bahnenmenge*

$$S_G \times S_M \backslash\!\backslash (W \cup \{0\})_{\mathcal{K}}^{G\times M} ,$$

ist bijektiv zur Menge von Doppelnebenklassen

$$S_G \times S_M \backslash S_{G\times M} / \oplus_{w\in W\cup\{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}.$$

Die Bijektion ist, für jedes $\sigma \in S_{G\times M}$ gegeben durch

$$(S_G \times S_M)(\mathcal{K} \circ \sigma^{-1}) := (S_G \times S_M)\, \sigma \left(\oplus_{w\in W\cup\{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}\right).$$

Tatsächlich ist diese Bijektion schon erfolgreich zur Konstruktion von Repräsentanten von Kontextklassen und vielen anderen diskreten Strukturen — zum Beispiel Graphen, molekularen Graphen, linearen Codes, t-Designs — verwandt worden. Läßt man in 1.3.1 den Kontext $\mathcal{K}$ ein vollständiges System von Kontexten verschiedenen Gewichts durchlaufen und berechnet jedes Mal eine Transversale der entsprechenden Doppelnebenklassen, so erhält man insgesamt ein System von Doppelnebenklassenrepräsentanten, das durch Rückübersetzung ein vollständiges Repräsentantensystem der Kontextklassen liefert. Es bleibt aber noch zu klären, wie man die Berechnung solcher Doppelnebenklassenrepräsentanten ökonomisch vernünftig organisieren kann.

Eine Methode, die sich hierbei außerordentlich bewährt hat, besteht in der Verwendung eines geeigneten *Leporellos* (=Faltblatt) von Untergruppen. Sie ist von B. Schmalz unter dem Namen *Leiterspiel* eingeführt und sehr erfolgreich zur Konstruktion kompletter Listen von t-Designs mit gegebener Automorphismengruppe benutzt worden ([17], [18], [19]). Andere Anwendungen betrafen die Konstruktion vollständiger Listen von schlichten Graphen mit gegebenen Anzahlen von Punkten und Kanten usw.

Das Verfahren beruht auf der Beobachtung, daß die Doppelnebenklassenmenge

$$S_G \times S_M \backslash S_{G\times M} / \oplus_{w\in W\cup\{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}$$

eine Vereinigung von Linksnebenklassen der Form

$$\sigma \left(\oplus_{w\in W\cup\{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}\right)$$

ist. Die Gruppe

$$\bigoplus_{w \in W \cup \{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)},$$

um deren Linksnebenklassen es sich dabei dreht, gehört zu einer speziellen Klasse von Untergruppen der symmetrischen Gruppe $S_{G\times M}$, sie ist nämlich direkte Summe von symmetrischen Gruppen

$$S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}, w \in W \cup \{0\},$$

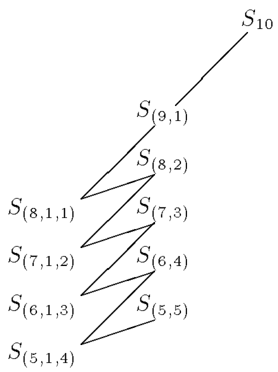
auf den Blöcken $\mathcal{K}^{-1}(w), w \in W \cup \{0\}$, einer Mengenpartition von $G \times M$. Solche speziellen Untergruppen symmetrischer Gruppen, also direkte Summen symmetrischer Gruppen, nennt man *Younguntergruppen*[8]*.* Dabei kommt es nicht einmal auf die Mengenpartition sondern — bis auf Konjugation innerhalb der großen symmetrischen Gruppe — nur auf die Kardinalzahlen der Blöcke an. Wir können deshalb (denn die Stabilisatoren der Elemente einer Bahn bilden ja eine Konjugiertenklasse von Untergruppen) $S_{(4,4)}$ schreiben, wenn wir eine Younguntergruppe einer symmetrischen Gruppe auf 8 Elementen meinen, die zu einer Mengenpartition aus zwei Blöcken der Ordnung 4 besteht. Im allgemeinen Fall wird die entsprechende Younguntergruppe so bezeichnet:

$$S_{(a,b,c,\ldots)} := S_a \oplus S_b \oplus S_c \oplus \ldots .$$

Der entscheidende Punkt ist nun, daß man Linksnebenklassenrepräsentanten solcher Younguntergruppen *schrittweise* berechnen kann, indem man einen sogenannten *Leporello* von Younguntergruppen entlang geht. *Eine solcher Leporello ist aber im allgemeinen keine Kette,* denn in vielen Fällen geht es dabei nicht immer nur, ausgehend von der großen symmetrischen Gruppe über Untergruppen abwärts, sondern manchmal muß man auch aufwärts gehen. Man muß also sowohl die *Zerlegung* als auch die *Fusion* von Doppelnebenklassen in bzw. zu Doppelnebenklassen beherrschen. Dieses Problem ist aber in den erwähnten Arbeiten erfolgreich gelöst worden.

Hier ist als Beispiel ein Leporello von Younguntergruppen der symmetrischen Gruppe S_{10}, der bis zur Younguntergruppe $S_5 \oplus S_5$ hinunterführt:

[8]Nach Alfred Young (1873-1940), Invariantentheoretiker, entwickelte vor allem parallel zu, aber unabhängig von Frobenius die Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen.



Diesen Leporello von Untergruppen der S_{10} kann man beispielsweise zur sukzessiven Berechnung von Transversalen von

$$S_5\backslash S_{10}/S_{10}, S_5\backslash S_{10}/S_9 \oplus S_1, \ldots, S_5\backslash S_{10}/S_5 \oplus S_5,$$

verwenden um daraus gemäß obiger Argumentation Kontexte mit $|G| = 2$ und $|M| = 5$ mit $0, 1, 2, 3, 4, 5$ Einsen oder auch die Graphen mit 5 Punkten ($\binom{5}{2} = 10$) und $0, 1, 2, 3, 4, 5$ Kanten zu ermitteln. (Die übrigen Kontexte oder Graphem mit $6, 7, 8, 9, 10$ Einsen bzw. Kanten können daraus mittels Komplementierung gewonnen werden.)
Leporellos sind natürlich nicht nur bei Younguntergruppen verwendbar. Ganz allgemein geht man hierbei entlang eines Leporello von Untergruppen U_i, $i = 0, \ldots, k$, von $\Gamma = U_0$ nach $U = U_k$. Dabei soll entweder $U_i < U_{i+1}$ (d. h. U_i sei *echte* Untergruppe von U_{i+1}) oder $U_i > U_{i+1}$ gelten. Die Intention dabei ist die Gewinnung einer Transversalen von $\Gamma\backslash H/U_{i+1}$ aus einer Transversalen von $\Gamma\backslash H/U_i$, für $i = 0, 1, \ldots, k-2$ und schließlich der gesuchten Transversalen von $\Gamma\backslash H/U = \Gamma\backslash H/U_k$. Oder, mit anderen Worten, wir wollen eine Transversale der Bahnen von Γ auf H/U_{i+1} aus einer Transversalen der Bahnen von Γ auf H/U_i gewinnen. Im Falle $U_i < U_{i+1}$ enthält eine Transversale von $\Gamma\backslash H/U_i$ natürlich auch eine Transversale von $\Gamma\backslash H/U_{i+1}$, so daß wir "nur" eine geeignete Teilmenge zu finden haben, die eine der gesuchten Transversalen ist. Dies ist der sogenannte *Aufwärtsschritt.* Für den *Abwärtsschritt* kann man folgendes Lemma mit Gewinn benutzen:

1.3.2 Hilfssatz *Eine Gruppe* Γ *operiere auf den Mengen* X_i, $i = 1, 2,$

und eine Abbildung $\varphi: X_2 \to X_1$ *sei mit der Operation vertauschbar,*

$$\varphi(\gamma x_2) = \gamma\varphi(x_2) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma, x_2 \in X_2.$$

Dann gilt für die Elemente x_i *einer Transversalen* T *der Bahnenmenge* $\Gamma\backslash\!\backslash X_1$ *:*

- *Jede Bahn* ω *von* Γ *auf* X_2 *hat mit genau einem der Urbilder* $\varphi^{-1}(x_i)$ *einen nicht leeren Schnitt:*

  $$\exists_1 \ x_i\colon \ \omega \cap \varphi^{-1}(x_i) \neq \emptyset.$$

  Aus diesen Urbildern läßt sich demnach eine Transversale der Bahnen von Γ *herausgreifen.*

- *Jedes Urbild* $\varphi^{-1}(x_i)$ *ist ein sogenannter* Block, *d. h. diese Menge wird durch jedes* $\gamma \in \Gamma$ *entweder auf sich selbst oder auf eine disjunkte Teilmenge abgebildet. Anstelle von* Γ *kann man deshalb die Operation des* Normalisators $N_\Gamma(\varphi^{-1}(x_i))$ *von* $\varphi^{-1}(x_i)$ *betrachten (das ist die Menge der* $\gamma \in \Gamma$, *die* $\varphi^{-1}(x_i)$ *als Menge fest lassen), denn*

  $$\omega \cap \varphi^{-1}(x_i) = N_\Gamma(\varphi^{-1}(x_i))(x),$$

  für jedes $x \in \varphi^{-1}(x_1)$.

- *Darüberhinaus ist der Normalisator des Urbilds gerade der Stabilisator des Elements:*

  $$N_\Gamma(\varphi^{-1}(x_i)) = \Gamma_{x_i}.$$

  Zwei Elemente $x, x' \in \varphi^{-1}(x_i)$ *liegen also genau dann in derselben Bahn unter* Γ, *wenn sie durch ein Element des Stabilisators* Γ_{x_i} *aufeinander abgebildet werden. (Dies reduziert die jeweils zu betrachtende Gruppe oft erheblich; anstelle von* Γ *ist ja nur der Stabilisator* Γ_{x_i} *zu untersuchen.)*

Ist φ *surjektiv, dann erhält man demnach eine Transversale* $\mathcal{T}$ *von* $\Gamma\backslash\!\backslash X_2$ *wie folgt:*

1. *Man berechnet zunächst eine Transversale* T *von* $\Gamma\backslash\!\backslash X_1$ *und für jedes ihrer Elemente* x_i *den Stabilisator* Γ_{x_i}.

2. *Dann berechnet man die Urbilder* $B_i := \varphi^{-1}(x_i)$.

3. *Schließlich ermittelt man für jeden dieser Blöcke eine Transversale T_i von*
$$N_\Gamma(\varphi^{-1}(x_i)\backslash\backslash B_i.$$

Die folgende Menge ist dann eine Transversale der Bahnen von Γ auf X_2 :
$$\mathcal{T} := \bigcup_i T_i.$$

Das ist in seinen Einzelheiten leicht nachzuvollziehen. Es kann in folgender Weise systematisch angewandt werden: Nehmen wir an, Γ operiere auf den Mengen $X_i, 1 \leq i \leq m$, und es seien surjektive Abbildungen
$$\varphi_{i+1} : X_{i+1} \to X_i, 1 \leq i \leq m-1,$$
gegeben, die mit den Operationen kommutieren:
$$\varphi_{i+1}(\gamma x_{i+1}) = \gamma\varphi_{i+1}(x_{i+1}), 1 \leq i \leq m-1,$$
für jedes $\gamma \in \Gamma$, $x_{i+1} \in X_{i+1}$. Dann kann man eine Transversale $\mathcal{T}$ von $\Gamma\backslash\backslash X_m$ sukzessive durch Anwendungen von 1.3.2 ermitteln, in dem man, ausgehend von einer Transversalen von $\Gamma\backslash\backslash X_1$ und den Stabilisatoren der Elemente dieser Transversalen wie beschrieben eine Transversale von $\Gamma\backslash\backslash X_2$ findet, dann eine von $\Gamma\backslash\backslash X_3$, usw.
Eine interessante Anwendung hiervon ist beispielsweise die Berechnung von Katalogen von Multigraphen mit beschränkter Kantenvielfachheit aus den schlichten Graphen mit gegebener Anzahl von Punkten. Eine detaillierte Beschreibung dieser Vorgehensweise findet man in [12], [15]. Wir können sie zu einer rekursiven Berechnung mehrwertiger Kontexte verwenden, durch Rekursion nach der Ordnung $|W|$ des Wertebereichs W der Merkmalsausprägungen.

Die oben beschriebene Konstruktion einer *vollständigen* Liste von Kontextklassen vorgegebenen Gewichts ist nur bei recht kleinen Gegenstands- und Merkmals- und Wertemengen durchführbar, da sie die Berechnung von Doppelnebenklassen in einer bald sehr großen symmetrischen Gruppe verlangt. Soweit dies möglich ist, kann man dabei die voranstehenden Formeln für die Anzahlen der Kontextklassen vorgegebenen Gewichts als *Abbruchregel* verwenden. Will man größere Kontexte betrachten, muß man sich wohl auf die *Zufallserzeugung* von Repräsentanten der Kontextklassen beschränken. Eine solche Zufallserzeugung soll allerdings auch *gleichverteilt* sein, denn

man will ja beispielsweise jeden Kontext der betrachteten Form (gegeben sind dabei etwa $|G|$ und $|M|$, eventuell noch die Anzahl der Einsen in der Matrix) *mit derselben Wahrscheinlichkeit* wie jeden anderen erhalten.
Dieses Problem ist ein altes und ganz wichtiges Problem der Mathematik, es ist das Problem der *vorurteilsfreien (=gleichverteilten) Erzeugung großer Beispielsätze, etwa zum Nachprüfen von Hypothesen, wofür die Gleichverteilung ganz offenbar unabdingbar ist!*
Tatsächlich gibt es hierfür — zumindest für diskrete Strukturen, die als Bahnen endlicher Gruppen auf endlichen Mengen definiert werden können — eine Lösung, nämlich einen Algorithmus ([1]), der die gleichverteilte Zufallserzeugung von Bahnrepräsentanten ermöglicht. Dieser läßt sich beispielsweise auf Kontexte, Graphen, Codes etc. anwenden.

1.3.3 Der Satz von Dixon und Wilf *Operiert die endliche Gruppe Γ auf der endlichen Menge X, dann erhält man in folgender Weise ein Element $x \in X$, das gleichverteilt über die Bahnen von Γ auf X ist, d. h. für jede Bahn ω von Γ auf X ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß x in ω liege, gleich groß:*

- *Man wählt eine Konjugiertenklasse*[9] *C von Γ mit folgender Wahrscheinlichkeit aus:*
$$p(C) := \frac{|C||X_\gamma|}{|\Gamma||\Gamma\backslash\!\backslash X|},$$
für irgendein $\gamma \in C$.
- *Dann erzeugt man zufällig, aber gleichverteilt, einen Fixpunkt x von γ, also ein $x \in X_\gamma$.*

Der so ermittelte bzw. erzeugte Fixpunkt ist über die Bahnen gleichverteilt.

1.3.4 Folgerung *Folgender Algorithmus liefert eine gleichverteilte Zufallserzeugung von Kontexten, d. h. man erhält Kontexte, die jeder Bahn aus*
$$S_G \times S_M \backslash\!\backslash (W \cup \{0\})^{G\times M}$$

[9] Die Gruppe Γ operiert auf sich selbst per Konjugation:
$$\Gamma \times \Gamma \to \Gamma\colon (\gamma, \delta) \mapsto \gamma\delta\gamma^{-1}.$$
Die Bahn $\Gamma(\delta)$ heißt die *Konjugiertenklasse* von δ, die wir gelegentlich mit C^δ bezeichnen; der Stabilisator heißt der *Zentralisator* dieses Elements.

mit derselben Wahrscheinlichkeit

$$|S_G \times S_M \backslash\!\backslash (W \cup \{0\})^{G\times M}|^{-1}$$

angehören:

- *Wähle eine Konjugiertenklasse $C^a \times C^b$ von $S_G \times S_M$ mit der Wahrscheinlichkeit*

$$p(a,b) := \frac{|C^a||C^b||(W \cup \{0\})|^{|\langle(\alpha,\beta)\rangle \backslash\!\backslash G\times M|}}{|G|!|M|!|S_G \times S_M \backslash\!\backslash (W \cup \{0\})^{G\times M}|}.$$

  (Dabei sei (α, β) irgendein Paar aus $C^a \times C^b$, so daß sich diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe von 1.2.11 ermitteln läßt.)

- *Nimm aus $C^a \times C^b$ irgendein Element (π, ρ) und berechne die davon auf $G \times M$ induzierte Permutation $\overline{(\pi, \rho)}$.*

- *Ordne den zyklischen Faktoren von $\overline{(\pi, \rho)}$ gleichverteilt und zufällig Elemente aus $W \cup \{0\}$ zu.*

Die auf diese Weise entstandene Abbildung $f \in (W \cup \{0\})^{G\times M}$ ist ein Kontext, der jeder der Kontextklassen mit derselben Wahrscheinlichkeit angehört; er ist also gleichverteilt über die Bahnen von $S_G \times S_M$ auf $(W \cup \{0\})^{G\times M}$.

Betrachten wir einmal die Konstruktion und Generierung von Kontexten in allen Einzelheiten, etwa für $G := \underline{2} = \{1, 2\}$ und $M := \underline{3} = \{1, 2, 3\}$. Es geht also um die Operation von $S_{\underline{2}} \times S_{\underline{3}}$ auf der Menge $\underline{2} \times \underline{3}$. Die Menge der Merkmalsausprägungen sei $W := \{1\}$, d. h. wir betrachten nur einwertige Kontexte, das sind $0, 1$-Matrizen mit 2 Zeilen und 3 Spalten. Zur Berechnung der Anzahl der Bahnen geben wir zunächst die *Zykeltypen* (das sind die Folgen von Anzahlen von Zyklen der Längen 1, 2,..., die in Permutationen aus diesen Gruppen auftreten können) a^i bzw. b^j von $S_{\underline{2}}$ bzw. von $S_{\underline{3}}$ an, es sind dies

$$a^1 := (2, 0), a^2 := (0, 1), b^1 := (3, 0, 0), b^2 := (1, 1, 0), b^3 := (0, 0, 1).$$

Die zugehörigen Konjugiertenklassen haben die Ordnungen

$$1, 1, 1, 3, 2.$$

Die Zykeltypen $a(a^i, b^j)$ bzw. die Anzahl $c(a, b)$ zyklischer Faktoren der von den Paaren $(\pi, \rho), \pi \in a^i, \rho \in b^j$, auf $G \times M = \underline{2} \times \underline{3}$ induzierten Permutationen sind

$$a(a^1, b^1) = (6, 0, 0, 0, 0, 0), \ \mathit{bzw.}\ c(a^1, b^1) = 6,$$

$$\begin{aligned}
a(a^1, b^2) &= (2, 2, 0, 0, 0, 0),\ bzw.\ c(a^1, b^2) = 4,\\
a(a^1, b^3) &= (0, 0, 2, 0, 0, 0),\ bzw.\ c(a^1, b^3) = 2,\\
a(a^2, b^1) &= (0, 3, 0, 0, 0, 0),\ bzw.\ c(a^2, b^1) = 3,\\
a(a^2, b^2) &= (0, 3, 0, 0, 0, 0),\ bzw.\ c(a^2, b^2) = 3,\\
a(a^2, b^3) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1),\ bzw.\ c(a^2, b^3) = 1.
\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus mit Hilfe von 1.3.4 die Anzahl der Kontextklassen, denn eine Abbildung (ein Kontext!) ist genau dann Fixpunkt, wenn sie (er) konstant auf diesen Zyklen ist. Die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation ist also 2^z, wenn z die Anzahl der Zyklen, also die Summe der Einträge im Zykeltyp ist. Wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned}
|S_{\underline{2}} \times S_{\underline{3}} \backslash\!\backslash \{0,1\}^{\underline{2}\times\underline{3}}| &= \frac{1}{2\cdot 6}\left(2^6 + 3\cdot 2^4 + 2\cdot 2^2 + 2^3 + 3\cdot 2^3 + 2\cdot 2^1\right)\\
&= 13.
\end{aligned}$$

Es gibt also insgesamt 13 Klassen einwertiger Kontexte mit 2 Gegenständen und 3 Merkmalen, wie schon bei der Abzählung von Kontexten festgestellt werden konnte.

Im nächsten Schritt wollen wir die erzeugende Funktion für die gewichtete Abzählung dieser Kontexte ermitteln. Wir erhalten dieses Polynom nach 1.2.16 und mittels SYMMETRICA in der folgenden Form

$$Z(S_{\underline{2}} \times S_{\underline{3}}, \underline{2} \times \underline{3} \mid 1 + x) = 1 + 1x + 3x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 1x^5 + 1x^6.$$

Es gibt also beispielsweise genau 3 Kontextklassen, die genau 3 Einsen enthalten.

Will man die Kontextklassen mit einer einzigen Eins konstruieren, dann hat man eine Transversale der folgenden Menge von Doppelnebenklassen zu ermitteln:

$$S_{\underline{2}} \times S_{\underline{3}} \backslash S_{\underline{2}\times\underline{3}} / S_5 \oplus S_1,$$

da ja der Stabilisator in $S_{\underline{2}\times\underline{3}}$ eines Kontextes $\mathcal{K}$ mit genau einer Eins nach dem eingangs dieses Paragraphen Bemerkten gerade

$$(S_{\underline{2}\times\underline{3}})_{\mathcal{K}} = \oplus_{w\in\{0,1\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)} = S_{\mathcal{K}^{-1}(0)} \oplus S_{\mathcal{K}^{-1}(1)} = S_5 \oplus S_1$$

ist.

Dazu kann man gegebenenfalls vorhandene Doppelnebenklassenprogramme verwenden, insbesondere solche, die speziell auf die Berechnung kanonischer Transversalen von Doppelnebenklassen in symmetrischen Gruppen zugeschnitten sind ([9]).

Betrachten wir abschließend die gleichverteilte Zufallserzeugung gemäß 1.3.3. Dazu brauchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten $p(a^i, b^k)$. Diese ergeben sich aus obigem Zahlenmaterial zu

$$p(a^1, b^1) = \frac{16}{39},\ p(a^1, b^2) = \frac{12}{39},\ p(a^1, b^3) = \frac{2}{39},$$

$$p(a^2, b^1) = \frac{2}{39}\ , p(a^2, b^2) = \frac{6}{39},\ p(a^2, b^3) = \frac{1}{39}.$$

Will man keinen Zufallszahlengeber für reelle Zahlen zwischen 0 und 1 verwenden, dann kann man diese Zahlen mit 39 multiplizieren und erhält die Folge $16, 12, 2, 2, 6, 1$. Diese Zahlenfolge hat als Folge von Partialsummen

$$16, 28, 30, 32, 38, 39.$$

Man kann jetzt einen Zufallszahlengeber verwenden, der natürliche Zahlen p mit $1 \le p \le 39$ erzeugt. Erhält man von diesem beispielsweise die Zahl 37, dann bedeutet dies die Wahl der Konjugiertenklasse

$$C = C^{a^2} \times C^{b^2},$$

aus der man sich irgendein Element herauspickt, etwa

$$(\pi, \rho) = ((12), (12)(3)).$$

Dieses Element erzeugt auf $G \times M = \underline{2} \times \underline{3}$ die Permutation

$$\overline{(\pi, \rho)} = ((1,1), (2,2))((1,2), (2,1))((1,3), (2,3)).$$

Nun belegen wir die Zyklen von $\overline{(\pi, \rho)}$ gleichverteilt und zufällig mit dem Wert 0 oder 1, etwa

$$((1,1), (2,2)) \mapsto 0, ((1,2), (2,1)) \mapsto 1, ((1,3), (2,3)) \mapsto 1;$$

dann ist diese Abbildung f die folgende, unter (π, ρ) feste, 0-1- Matrix:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \{0, 1\}^{G \times M}.$$

Es wurde also der folgende Kontext generiert:

	m_1	m_2	m_3
g_1	0	1	1
g_2	1	0	1

Es gibt auch eine gewichtete Form der Zufallserzeugung, auf die wir hier aber aus Platz- und Zeitgründen nicht näher eingehen wollen.

Übungen

Ü 1.3.1 Man beweise Hilfssatz 1.3.2.

Ü 1.3.2 Bestätigen Sie die oben errechnete Zahl einwertiger Kontextklassen mit 2 Gegenständen und 3 Merkmalen, also 13, durch explizites Hinschreiben entsprechender Kreuzchentabellen.

Ü 1.3.3 Die oben angegebene Zufallserzeugung eines Kontextes mit 2 Gegenständen und 3 Merkmalen ist in allen Einzelheiten zu verifizieren.

Kapitel 2

Begriffsverbände

Nach einer kurzen Einführung in die Definition von Begriffen und Begriffsverband eines Kontextes haben wir uns zunächst eine Übersicht über die Vielfalt der Kontextklassen verschafft, so daß es jetzt Zeit ist, die Begriffsverbände und deren Mathematik detaillierter auszubreiten.

2.1 Begriffsverbände

In diesem Paragraphen werden die wichtigsten Eigenschaften der Begriffsverbände zusammengestellt. Es zeigt sich dabei, daß die Begriffe Hüllenoperator und Galoisverbindung wichtige Eigenschaften der Ableitung beschreiben und damit die Definition des Begriffs in einen ganz allgemeinen Zusammenhang bringen.
Grundlegend für das Folgende ist die allgemeine Definition von Abbildungen mit Eigenschaften, wie sie die oben eingeführten zweiten Ableitungen $X \mapsto X''$ haben:

2.1.1 Definition (Hüllenoperator) *Ist* $(X, \leq)$ *eine (partiell) geordnete Menge, dann heißt eine Abbildung*

$$X \to X : x \mapsto \overline{x}$$

von X *in sich* Hüllenoperator *(auf* X*), wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:*

- $x \leq \overline{x}$ (Extensivität)
- $x \leq y \Rightarrow \overline{x} \leq \overline{y}$ (Monotonie)
- $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$ (Idempotenz)

für alle $x, y \in X$*; dabei heißt* $\overline{x}$ *auch* Abschluß von x *oder* abgeschlossen *(bez. des Hüllenoperators) oder* von x erzeugt.

Hüllenoperatoren kommen häufig vor:

2.1.2 Beispiele (Hüllenoperatoren)
Ein Hüllenoperator ist zum Beispiel die Abbildung, die jedem reellen x die kleinste ganze Zahl $\geq x$ zuordnet:

- $\lceil\text{-}\rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x \rceil := min\{z \in \mathbb{Z} \mid x \leq z\}$ ist Hüllenoperator auf $\mathbb{R}$.

Noch einfacher sind die identischen Abbildungen $x \mapsto x$, die natürlich ebenfalls Hüllenoperatoren sind. Bei den folgenden grundlegenden Beispielen ist die Halbordnung jeweils die Mengeninklusion $\subseteq$ auf der Potenzmenge einer Menge M :

- Die Bildung der *konvexen Hülle* von Teilmengen x des Raums $M = \mathbb{R}^n$.

- Die Bildung der *transitiven Hülle* von Relationen x, also von Teilmengen $x \subseteq M = L \times N$.

- Die Zuordnung der *abgeschlossenen Hülle* zu einer Teilmenge x eines topologischen Raums M.

- Das Erzeugnis $\overline{x}$ einer Teilmenge x einer algebraischen Struktur M, also beispielsweise die *lineare Hülle* von x in einem Vektorraum M.

- *Die Bildung der zweiten Ableitungen x'' von Gegenstands- oder Merkmalsmengen x, wie oben beschrieben.*

Achtet man bei den gegebenen Beispielen für Hüllenoperatoren zu Potenzmengen auf den Durchschnitt zweier — oder auch beliebig vieler — abgeschlossener Mengen, so fällt auf, daß dieser stets auch abgeschlossen (bez. des jeweiligen Hüllenoperators) ist: Abgeschlossenheit scheint also "durchschnittserblich" zu sein. Um diese Beobachtung zu präzisieren, geben wir zunächst

2.1.3 Definition (Hüllensystem) *Für eine beliebige Menge M und eine Teilmenge $\mathcal{H}$ der Potenzmenge von M heiße $\mathcal{H}$* Hüllensystem *(auf M), falls $M \in \mathcal{H}$ und für jedes nichtleere $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$ gilt:*

$$\bigcap \mathcal{T} := \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T \in \mathcal{H}.$$

Die Elemente von $\mathcal{H}$ werden dann auch Hüllen *genannt.*

Zwar haben wir in den Beispielen zu Hüllenoperatoren — wie sich gleich zeigen wird — schon etliche Exempel von Hüllensystemen kennengelernt, doch wollen wir noch einige weitere angeben:

2.1.4 Beispiele (Hüllensysteme)

- Die leere Menge $\emptyset$, die Menge E aller Ecken, die Menge K aller Kanten, die Menge F aller Seitenflächen eines dreidimensionalen Polyeders P bilden, zusammen mit dem Polyeder P selbst, das folgende Hüllensystem (über der Eckenmenge des Polyeders)
$$\mathcal{H} := \{\emptyset\} \cup E \cup K \cup F \cup \{P\}.$$

- Die Unterstrukturen — genauer deren Trägermengen — einer algebraischen Struktur, also z. B. die Untergruppen einer Gruppe, die Unterräume eines Vektorraums usw., ergeben ein Hüllensystem. Manchmal muß man dabei aber auch $\emptyset$ als Unterstruktur akzeptieren (z. B. bei Halbgruppen).

- Ein Hüllensystem bilden auch die endlichen Teilmengen einer Menge M, zusammen mit M selbst:

$$\{E \subseteq M \mid |E| \in \mathbb{N}\} \cup \{M\}.$$

- Die trivialen Hüllensysteme auf M sind natürlich $\{M\}$ und die gesamte Potenzmenge von M.

- Ein weiteres Hüllensystem — jetzt auf $M \times M$ — besteht aus den Äquivalenzrelationen auf M.

- Auch die mit den Operationen verträglichen Äquivalenzrelationen auf einer algebraischen Struktur S, die sogenannten *Kongruenzen,* bilden ein Hüllensystem auf $S \times S$.

- *Ist wieder (G, M, I) ein Kontext, dann bilden die Gegenstandsmengen $A \subseteq G$ mit $A = A''$ ein Hüllensystem auf G; ebenso sind die Merkmalsmengen $B \subseteq M$, die $B = B''$ genügen, ein Hüllensystem auf M.*

Unsere Vermutung, daß die Begriffe "Hüllenoperator für M" und "Hüllensystem auf M" inhaltlich im wesentlichen dieselbe Sache fassen, wird präzisiert durch

2.1.5 Satz *Für beliebige Mengen M gilt:*

- *Für jeden Hüllenoperator γ auf der Potenzmenge von M ist*

$$\mathcal{H}_\gamma := \{\gamma(N) \mid N \subseteq M\}$$

Hüllensystem auf M. Die Hüllen von $\mathcal{H}_\gamma$ sind genau die abgeschlossenen Mengen von γ.

- *Für jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ auf M ist*

$$\gamma_{\mathcal{H}} := N \mapsto \bigcap \{H \in \mathcal{H} \mid N \subseteq H\}$$

Hüllenoperator auf der Potenzmenge von M, und die abgeschlossenen Mengen von $\gamma_{\mathcal{H}}$ sind genau die Hüllen von $\mathcal{H}$.

- *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\gamma_{\mathcal{H}_\gamma} = \gamma \quad \textit{und} \quad \mathcal{H}_{\gamma_{\mathcal{H}}} = \mathcal{H}.$$

Beweis:
i) Nach Definition ist $\mathcal{H}_\gamma$ eine Teilmenge der Potenzmenge von M, kommt also als Kandidat für ein Hüllensystem in Frage. Wegen der Extensivität gilt $M \subseteq \gamma(M)$, mit $\gamma(M) \subseteq M$ folgt daraus $M = \gamma(M) \in \mathcal{H}_\gamma$. Zum abschließenden Nachweis der Durchschnittsabgeschlossenheit argumentieren wir so: Sei $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}_\gamma$, D der Schnitt der $T \in \mathcal{T}$, also $D := \cap\, \mathcal{T}$. Für jedes $\gamma(N) \in \mathcal{T}$ gilt wegen der Monotonie und der Idempotenz von γ :

$$\gamma(D) \subseteq \gamma(\gamma(N)) = \gamma(N)$$

und daher $\gamma(D) \subseteq \cap\, \mathcal{T} = D \subseteq \gamma(D)$, letzteres wegen der Extensivität, was $D = \gamma(D)$ und damit $D \in \mathcal{H}_\gamma$ impliziert.
ii) Das Bild von N unter $\gamma_{\mathcal{H}}$ ist, per definitionem und wegen der Durchschnittsabgeschlossenheit von $\mathcal{H}$, das kleinste Element von $\mathcal{H}$, das N umfaßt. Hieraus folgen Extensivität, Monotonie und Idempotenz von $\gamma_{\mathcal{H}}$ ganz unmittelbar, und auch, daß die abgeschlossenen Mengen gerade die Elemente von $\mathcal{H}$ sind.
iii) Den Beweis der Zuordnung dieser Hüllensysteme und Hüllenoperatoren überlassen wir dem interessierten Leser (Übungsaufgabe 2.1.2).

□

Für das Folgende müssen wir noch an einige weitere wichtige Begriffsbildungen bei geordneten Mengen erinnern: Auch bei einer halb- oder partiell geordneten Menge $(X, \leq)$ lassen sich die Begriffe *untere und obere Schranke* einer Teilmenge Y von X wie in der Analysis einführen, ebenso das *Infimum,* $\inf Y$, bzw. das *Supremum,* $\sup Y$, als größte untere bzw. kleinste obere Schranke von Y. Diese existieren bekanntlich nicht immer in X : Für $X = \mathbb{Q}$ etwa und $Y = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2, x \geq 0\}$ ist ja $\inf Y = \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
In halbgeordneten Mengen $V \neq \emptyset$ ist es deshalb besonders angenehm — und auch wichtig —, wenn es zu beliebigen Elementen $x, y \in V$ stets $\inf\{x, y\}$ und $\sup\{x, y\}$ gibt. Solche V heißen *verbandsgeordnete Mengen* oder kurz *Verbände.* In ihnen lassen sich durch $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ und $x \vee y := \sup\{x, y\}$ für $x, y \in V$ Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ definieren. Man rechnet leicht nach, daß $(V, \wedge)$

und $(V,\vee)$ kommutative Halbgruppen sind und überdies

$$\forall\ x,y\in V\colon x\wedge(x\vee y)=x=x\vee(x\wedge y)\qquad\text{(Absorption)}$$

gilt. Ein Tripel $(V,\wedge,\vee)$ mit den genannten Eigenschaften heißt ebenfalls *Verband*, denn in ihm kann durch

$$x\leq y\iff x\wedge y=x\quad(\iff x\vee y=y)$$

eine Halbordnung $\leq$ erklärt werden, bei der zu $x,y\in V$ stets $\inf\{x,y\}$ und $\sup\{x,y\}$ existieren, und zudem gelangt man nach zweimaliger Anwendung der eben beschriebenen Prozesse wieder zum Ausgangspunkt zurück.
Außer auf die bereits zu Beginn erwähnten (halb)geordneten Mengen, die sich allesamt als Verbände entpuppen, weisen wir noch auf einen weiteren Verband hin: $(\mathbb{B},\leq)$ mit $\mathbb{B}:=\{0,1\}$ und $0<1$. Zur kräftigen Verallgemeinerung benutzen wir $\mathbb{B}_{m,n}$ als die Menge der Funktionen von $\mathbb{B}^m$ nach $\mathbb{B}^n$ und schreiben für $h\in\mathbb{B}_{m,n}$:

$$h(x_1,\ldots,x_m)=(h_1(x_1,\ldots,x_m),h_2(x_1,\ldots,x_m),\ldots,h_n(x_1,\ldots,x_m)).$$

Die Halbordnung $\leq$ sei gegeben durch

$$\forall\ (x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{B}^m\colon\ f_\nu(x_1,\ldots,x_m)\leq g_\nu(x_1,\ldots,x_m),1\leq\nu\leq n,$$

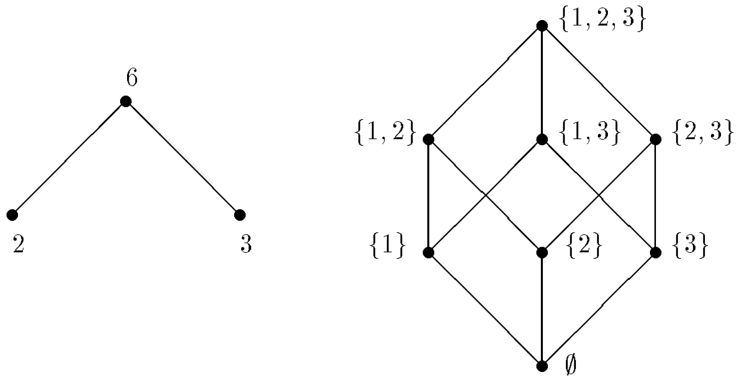
für $f,g\in\mathbb{B}_{m,n}$. Also ist $\mathbb{B}_{m,n}$ gerade der Verband der $m-$*stelligen Booleschen*[1] *Funktionen* — oder *Schaltfunktionen* — mit $n-$Tupeln über $\mathbb{B}$ als Werten; genau die Funktionen aus $\mathbb{B}_{m,n}$ können durch eine Schaltung mit m Eingängen und n Ausgängen realisiert werden.
Nach dem Bisherigen könnte nun der Eindruck entstehen, daß jede geordnete Menge Verband sei. Dem ist natürlich nicht so: In der geordneten Menge $(\{2,3,6\},|)$ etwa gibt es keine untere Schranke für $\{2,3\}$, also a fortiori auch keine größte (vgl. die Abbildungen in Beispiel 2.1.6).
Verhältnisse bei Verbänden — allgemeiner bei geordneten Mengen — lassen sich vielfach, insbesondere bei nicht zu großer endlicher Mächtigkeit, sehr schön durch die sog. *Hasse*- oder *Liniendiagramme* veranschaulichen, wie bereits erwähnt: Jedem Element einer geordneten Menge $(M,\leq)$ wird bijektiv ein Punkt einer (euklidischen) Ebene,

[1] Nach dem Mathematiker (Algebraiker, Logiker, Wahrscheinlichkeitstheoretiker) George Boole (1815-1864), der am Queens College in Cork lehrte.

der Zeichenebene, so zugeordnet, daß das Bild P_x von $x \in M$ unterhalb des Bildes P_y von $y \in M$ liegt, falls $x < y$ gilt. P_x wird genau dann mit P_y durch eine Linie verbunden, wenn x unterer oder oberer Nachbar von y ist. Dabei heiße x *unterer* bzw. *oberer Nachbar* von y im Falle

$$x < y \wedge \nexists z \in M : x < z < y, \text{ bzw. } x > y \wedge \nexists z \in M : x > z > y.$$

2.1.6 Beispiele (Hassediagramme) Hier sind die Hassediagramme der Halbordnungen $(\{2,3,6\}, \mid)$ und der Potenzmenge von $\{1,2,3\}$, mit der Inklusion als Halbordnung; diese ist ein Verband, jene nicht:



Ganz entsprechend wie bei anderen Gebilden sind auch bei Verbänden, allgemeiner bei geordneten Mengen, der Homomorphie- und Isomorphiebegriff wichtig: Eine Abbildung φ von einer geordneten Menge $(X, \leq)$ in eine geordnete Menge $(Y, \leq)$ heiße *Homomorphismus* oder *Ordnungshomomorphismus,* falls

2.1.7 $$x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \qquad (x, y \in X).$$

gilt. Eine solche Abbildung heißt *Isomorphismus* oder auch *Ordnungsisomorphismus* wenn sie zusätzlich noch bijektiv ist. Beispielsweise ist der Verband der Teilmengen von $\{1,2,3\}$ isomorph zum Verband $(T(30), |)$ der Teiler von 30. — Übrigens genügte die Forderung $\Rightarrow$

statt $\iff$ in 2.1.7 — selbst bei bijektivem φ und Verbänden — nicht: $\varphi = 1_{T(6)}$ erfüllt

$$x \mid y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y) \quad (x, y \in T(6)),$$

aber man wird nicht $(T(6), \leq)$ isomorph zu $(T(6), |)$ nennen!
Mit der Festlegung 2.1.7 haben wir zudem erreicht, daß ein solches φ für Verbände M und N eine die Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ respektierende Zuordnung ist:

$$\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y) \qquad \text{und} \qquad \varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$$

für alle $x, y \in M$. Oben hatten wir Verbände als geordnete Mengen $(M, \leq)$ charakterisiert, bei denen stets $\inf\{x, y\}$ und $\sup\{x, y\}$ existieren. Faßt man diese Kennzeichnung nun etwas restriktiver und fordert die Existenz von $\inf T$ und $\sup T$ für jedes $T \subseteq M$, so gelangt man zum wichtigen Begriff des *vollständigen Verbandes.* Jeder endliche Verband ist vollständig, ferner die Potenzmenge von M für beliebiges M, und $(\mathbb{N}, |)$; als nicht vollständig erweist sich etwa $(\mathbb{Q}, \leq)$.
Um nun zu zeigen, daß die Hüllensysteme i. w. genau die vollständigen Verbände sind, brauchen wir noch den Begriff des von einem Element a einer geordneten Menge $(M, \leq)$ erzeugten *Hauptideals*

$$(a] := \{x \in M \mid x \leq a\};$$

man beachte hierzu

2.1.8 $$a \leq b \iff (a] \subseteq (b] \qquad (a, b \in M).$$

Damit erhalten wir

2.1.9 Satz *Hüllensysteme sind im wesentlichen genau die vollständigen Verbände:*

- *Jedes Hüllensystem $\mathcal{H}$ ist bzgl. Inklusion ein vollständiger Verband.*
- *Für jeden vollständigen Verband $(V, \leq)$ ist $\mathcal{H}$, die Menge seiner Hauptideale, ein Hüllensystem, und der zugehörige vollständige Verband (gemäß vorausgehendem Punkt) ist isomorph zu V.*

Beweis: Der erste Punkt ist klar, soweit er die Infimumsbildung betrifft, denn das Infimum einer Familie von Teilmengen ist natürlich

deren Schnitt, liegt also im Hüllensystem, d. h. das Infimum existiert. Das Supremum existiert aber auch, denn es ist, per definitionem, die kleinste obere Schranke, also der Schnitt aller oberen Schranken der Teilfamilie und liegt demnach ebenfalls im Hüllensystem.
Jetzt zum zweiten Punkt: $(V, \leq)$ sei vollständiger Verband und $\mathcal{H}$ die Menge seiner Hauptideale. Da V vollständig ist, existiert $e := \sup V$, und man hat

$$V = (e] \in \mathcal{H}.$$

Sei nun $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}$, etwa

$$\mathcal{T} = \{(a_i] \mid i \in I\},$$

sowie $D := \cap_i (a_i]$. Wegen der Vollständigkeit von V existiert das Infimum $t := \inf \{a_i \mid i \in I\}$, und wir behaupten $D = (t]$. Dies folgt so:

$$x \in D \iff \forall i \in I{:}\, x \in (a_i] \iff \forall i \in I{:}\, x \leq a_i \iff x \in (t],$$

Damit ist $D = (t] \in \mathcal{H}$ gezeigt und $\mathcal{H}$ als Hüllensystem erkannt.
Zum abschließenden Beweis der Isomorphie der vollständigen Verbände sei φ definiert durch $\varphi(x) := (x]$ für $x \in V$. φ ist per definitionem surjektiv, und für $x, y \in V$ gilt

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow (x] = (y] \Rightarrow x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y\ ;$$

φ ist also auch injektiv, was φ wegen 2.1.8 als Isomorphismus erweist und somit $V \simeq \mathcal{H}$ zeigt.

□

Für die Formale Begriffsanalyse ist ein weiterer Begriff von prinzipieller Bedeutung, der stark mit Hüllenoperatoren zusammenhängt, die Galoisverbindung, die im klassischen Spezialfall auf Galois[2], in der hier benutzten Allgemeinheit jedoch auf Ore[3]zurückgeht.

2.1.10 Definition (Galoisverbindung) *$(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ seien partiell geordnete Mengen. Ein Paar (σ, τ) von Abbildungen $\sigma{:}\, X \to Y$ und $\tau{:}\, Y \to X$ heiße* Galoisverbindung *oder* Galoiskorrespondenz *zwischen X und Y im Falle*

---

[2] Évariste Galois (25.X.1811-31.V.1832), genialer Mathematiker, Mitschöpfer der Gruppentheorie.
[3] Oystein Ore: Galois connexions. Trans. AMS, **55** (1944), S 493-513

- *σ und τ sind* antiton:

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow \sigma(x_1) \geq \sigma(x_2), \;\; y_1 \leq y_2 \Longrightarrow \tau(y_1) \geq \tau(y_2),$$

- *$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sind extensiv:*

$$y \leq \sigma(\tau(y)), \;\; x \leq \tau(\sigma(x)).$$

Die beiden Abbildungen σ und τ heißen zueinander dual adjungiert.

◇

Hier ist eine etwas andere Charakterisierung von Galoisverbindungen:

2.1.11 Hilfssatz *Das Paar (σ, τ) ist genau dann eine Galoisverbindung zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$, wenn*

$$x \leq \tau(y) \iff y \leq \sigma(x)$$

für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt.

Beweis: Ist (σ, τ) eine Galoisverbindung, dann gilt

$$x \leq \tau(y) \Longrightarrow \sigma(x) \geq \sigma(\tau(y)) \geq y,$$

die erster Ungleichung wegen der Antitonie von σ und die letzte Ungleichung wegen der Extensivität von $\sigma \circ \tau$. In der behaupteten Äquivalenz ist also die Implikation von links nach rechts richtig, die andere gilt dann aus Symmetriegründen ebenfalls.
Sind umgekehrt σ und τ Abbildungen, für die die angegebene Äquivalenz richtig ist, dann bilden diese eine Galoisverbindung:

a) Die Extensivität ergibt sich so:

$$\sigma(x) \leq \sigma(x) \Longrightarrow_{y:=\sigma(x)} y \leq \sigma(x) \Longrightarrow x \leq \tau(\sigma(x)),$$

demnach ist $\tau \circ \sigma$ extensiv; dasselbe gilt für $\sigma \circ \tau$ aus Symmetriegründen.

b) Die Antitonie von σ ergibt sich mit Hilfe der Extensivität von $\tau \circ \sigma$:

$$x \leq x' \Longrightarrow x \leq \tau(\sigma(x')) \Longrightarrow_{\text{Vor.}} \sigma(x') \leq \sigma(x).$$

Die Antitonie von τ gilt aus Symmetriegründen ebenfalls.

□

Aus der Fülle möglicher Galoisverbindungen nennen wir hier nur einige wenige

2.1.12 Beispiele (Galoisverbindungen)

- Auf $X := Y := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ mit der Halbordnung $\leq$ bilden die Funktionen $\sigma := \tau := x \mapsto x^{-1}$ offenbar eine Galoisverbindung.
- Ist $X := Y := M$ eine Menge und $\sigma := \tau := N \mapsto M \backslash N$, dann ist (σ, τ) ebenfalls eine Galoisverbindung bzgl. $\subseteq$ als Halbordnung.
- Sei $(X, \leq) := (\mathbb{N}, |)$ und $(Y, \supseteq)$ die mit der Inklusion halbgeordnete Menge
$$Y := \{T(x) \mid x \in \mathbb{N}\},$$
$T(x)$ die Menge der Teiler von x, sowie $\sigma := x \mapsto T(x)$, und $\tau := T(x) \mapsto \max T(x)$, dann bilden diese Funktionen eine Galoisverbindung.
- Das klassische, namensgebende Beispiel ist natürlich die Galoisverbindung von den Zwischenkörpern einer galoisschen Körpererweiterung zu den Untergruppen der Galoisgruppe.
- Innerhalb eines Kontextes bildet das Paar $(-', -')$ der beiden Ableitungen eine Galoisverbindung zwischen den Potenzmengen von G und M.

Einige interessante Eigenschaften von Galoisverbindungen sind im Folgenden zusammengefaßt:

2.1.13 Hilfssatz *Ist (σ, τ) Galoisverbindung zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$, dann gilt:*

- $\sigma \circ \tau \circ \sigma = \sigma,\ \tau \circ \sigma \circ \tau = \tau,$
- *$\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ sind Hüllenoperatoren auf Y und X,*
- *für die Mengen $\overline{X}$ bzw. $\overline{Y}$ der Bilder von τ bzw. σ haben wir*
$$\overline{X} = \tau(Y), \text{ bzw. } \overline{Y} = \sigma(X),$$
und diese beiden Mengen $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ sind antiisomorph vermöge der entsprechenden (und zueinander inversen) Einschränkungen von σ und τ.

All dies ist leicht zu verifizieren. Wenden wir das, was wir über Hüllenoperatoren, Hüllensysteme und Galoisverbindungen wissen, auf Kontexte und deren Begriffe an, so ergibt sich:

2.1.14 Satz *Ist ein Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ gegeben, dann gilt:*

- *Das Paar $(-', -')$ aus den beiden Ableitungen ist eine Galoisverbindung zwischen der Potenzmenge der Gegenstandsmenge G und der Potenzmenge der Merkmalsmenge M.*
- *Für Teilmengen $A \subseteq G, B \subseteq M$ und deren Ableitungen gilt*

$$A \subseteq B' \iff B \subseteq A' \iff A \times B \subseteq I.$$

- *Die zweite Ableitung $-''$ ist ein Hüllenoperator auf der Potenzmenge der Gegenstandsmenge bzw. auf der Potenzmenge der Merkmalsmenge.*
- *Für Teilmengen $A \subseteq G, B \subseteq M$ und deren zweite Ableitungen gilt*

$$A \subseteq A'', B \subseteq B'', A' = A''', B' = B'''.$$

- *Die abgeschlossenen Mengen, also die Gegenstandsmengen $A \subseteq G$ mit $A = A''$ und die Merkmalsmengen $B \subseteq M$ mit $B = B''$ bilden das zugehörige Hüllensystem.*
- *Die Paare (A, A') bzw. (B', B) aus solchen abgeschlossenen Teilmengen A bzw. B sind gerade die Begriffe zum Kontext $\mathcal{K}$.*
- *Die abgeschlossenen Gegenstandsmengen sind also gerade die Begriffsumfänge, und die abgeschlossenen Merkmalsmengen sind genau die Begriffsinhalte.*
- *Die Begriffsumfänge und die Begriffsinhalte bilden jeweils einen vollständigen Verband, die Infimumsbildung ist dabei die Schnittbildung, das Supremum die obere Grenze, also die kleinste obere Schranke, der Schnitt der oberen Schranken.*
- *Die Begriffe bilden ebenfalls einen vollständigen Verband, den Begriffsverband*

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}) := \{(A'', A') \mid A \subseteq G\} = \{(B', B'') \mid B \subseteq M\}$$

mit der Halbordnung

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \iff A_1 \subseteq A_2 \iff B_1 \supseteq B_2.$$

- *Für Gegenstandsmengen A_i und Merkmalsmengen B_j gilt*

$$\left(\bigcup_i A_i\right)' = \bigcap_i A_i', \quad \left(\bigcup_j B_j\right)' = \bigcap_j B_j'.$$

- *Entsprechend gelten für die Infimumsbildung und die Supremumsbildung in $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ die folgenden Identitäten:*

$$\bigwedge_{j\in J}(A_j, B_j) = \left(\bigwedge_{j\in J} A_j, \bigvee_{j\in J} B_j\right) = \left(\bigcap_{j\in J} A_j, \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)''\right),$$

$$\bigvee_{j\in J}(A_j, B_j) = \left(\bigvee_{j\in J} A_j, \bigwedge_{j\in J} B_j\right), = \left(\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)'', \bigcap_{j\in J} B_j\right).$$

Das nächste Ziel ist die Beantwortung der Frage, welche Verbände denn Begriffsverbände seien. Diese kann man mit Hilfe der folgenden Definition beantworten:

2.1.15 Definition (supremum- bzw. infimum-dicht) *Ist $(V, \leq)$ ein Verband und X eine Teilmenge von V, dann heißt X* supremum-dicht *bzw.* infimum-dicht *in V, wenn jedes $v \in V$ Supremum bzw. Infimum einer Teilmenge Y von X ist.*

2.1.16 Satz *Ein vollständiger Verband $(V, \leq)$ ist genau dann isomorph zum Begriffsverband $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ des Kontextes $\mathcal{K} = (G, M, I)$, wenn es Abbildungen $\gamma: G \to V$ und $\mu: M \to V$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:*

- *$\gamma(G)$ ist supremum-dicht in V,*
- *$\mu(M)$ ist infimum-dicht in V,*
- *für alle $g \in G$ und $m \in M$ gilt: $\gamma(g) \leq \mu(m) \iff gIm$.*

Insbesondere ist V isomorph zum Begriffsverband $\mathcal{B}(V, V, \leq)$.

Beweis: Sei zunächst φ ein Verbandsisomorphismus von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ auf V und Abbildungen γ bzw. μ seien wie folgt definiert (mit $g' := \{g\}'$ etc.):

$$\gamma(g) := \varphi(g'', g'), \; \mu(m) := \varphi(m', m'').$$

$\gamma(G)$ ist supremum-dicht in V : Zu $v \in V$ gibt es $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $\varphi(A, B) = v$. Da

$$\left(\bigcup_{g\in A}\{g\}\right)'' = \left(\bigcap_{g\in A} g'\right)' = \left(\bigcup_{g\in A} g''\right)''$$

und daher (A, B) gleich

$$\left(\bigcup_{g\in A}\{g\}, \left(\bigcup_{g\in A}\{g\}\right)'\right) = \left(\left(\bigcup_{g\in A}\{g\}\right)'', \bigcap_{g\in A} g'\right)$$
$$= \bigvee_{g\in A} (g'', g')$$

ist, hat man

$$v = \varphi(A, B) = \varphi \bigvee_{g\in A} (g'', g') = \bigvee_{g\in A} \varphi(g'', g').$$

Analog ergibt sich, daß das Bild von μ infimum-dicht ist. Für alle $g \in G, m \in M$ gilt zudem:

$$\gamma(g) \leq \mu(m) \iff g'' \subseteq m' \iff g' \supseteq \{m\} \iff gIm.$$

Damit ist die eine Richtung der Behauptung bewiesen.
Für die Umkehrung seien Abbildungen γ und μ mit den angeführten Eigenschaften gegeben, und es sei $\varphi\colon \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to V$ definiert durch

$$\varphi(A, B) := \bigvee\{\gamma(g) \mid g \in A\}.$$

φ ist offenbar ordnungserhaltend. Sei weiterhin eine Abbildung ψ auf V definiert durch

$$\psi(x) := (\{g \in G \mid \gamma(g) \leq x\}, \{m \in M \mid \mu(m) \geq x\}).$$

Wir wollen zeigen, daß ψ rechts- und linksinvers ist zu φ. Im ersten Schritt beweisen wir, daß $\psi(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Da $\gamma(G)$ supremum-dicht und $\mu(M)$ infimum-dicht ist, gilt

$$x = \bigvee\{\gamma(g) \mid g \in G, \gamma(g) \leq x\} = \bigwedge\{\mu(m) \mid m \in M, \mu(m) \geq x\}.$$

Demnach ist

$$h \in \{g \in G \mid \gamma(g) \leq x\} \iff \forall\, n \in \{m \in M \mid \mu(m) \geq x\} \colon \gamma(h) \leq \mu(n).$$

Nach Voraussetzung (über γ und μ) ist dies aber äquivalent mit hIn, für all diese n, und das wiederum ist dasselbe wie

$$h \in \{m \in M \mid \mu(m) \geq x\}'.$$

Analog ergibt sich

$$n \in \{m \in M \mid \mu(m) \geq x\} \iff n \in \{g \in G \mid \gamma(g) \leq x\}'.$$

Also ist jedes $\psi(x)$ ein Begriff.
Die beiden Abbildungen sind zueinander invers, denn

$$\varphi(\psi(x)) = \bigvee \{\gamma(g) \mid g \in G, \gamma(g) \leq x\} = x,$$

also $\varphi \circ \psi = id_V$, und analog folgt $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$.

$\square$

Übungen

Ü 2.1.1 Γ sei eine auf der Menge M operierende Gruppe.

a) Man verifiziere, daß

$$X \mapsto \Gamma X := \{\gamma x \mid \gamma \in \Gamma, x \in X\}$$

ein Hüllenoperator auf der Potenzmenge von M ist.

b) Man beschreibe das Hüllensystem, das zu dem in a) definierten Hüllenoperator gehört.

Ü 2.1.2 Beweisen Sie den dritten Punkt von 2.1.5.

Ü 2.1.3 Die Gruppe Γ operiere auf der Menge M. In Verallgemeinerung des Begriffs des Stabilisators bzw. der Fixpunktmenge definieren wir für Teilmengen $X \subseteq M$ den *punktweisen Stabilisator*

$$\Gamma_X := \{\gamma \in \Gamma \mid \forall\, x \in X \colon \gamma x = x\}$$

und für Untergruppen $\Delta \subseteq \Gamma$ die *Fixpunktemenge*

$$M_\Delta := \{x \in M \mid \forall\, \delta \in \Delta \colon \delta x = x\}.$$

Man zeige, daß (σ, τ), mit

$$\sigma: X \to \Gamma_X, \ \tau: \Delta \mapsto M_\Delta,$$

eine Galoisverbindung zwischen der Potenzmenge von M und der Untergruppenmenge von Γ ist. — Inwieweit harmoniert diese mit der jeweiligen Verbandsstruktur?

Ü 2.1.4 Zeigen Sie, daß für Begriffsverbände $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(G, M, I)$ und vollständige Verbände $(V, \leq)$ folgendes gilt:

- Es gibt genau dann eine ordnungserhaltende Abbildung von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ in V, wenn es zwei Abbildungen $\alpha: G \to V$ und $\beta: M \to V$ gibt mit

$$\forall\ g \in G, m \in M\colon\ gIm \Rightarrow \alpha(g) \leq \beta(m).$$

- Es gibt genau dann eine Ordnungseinbettung (d. h. eine injektive ordnungserhaltende Abbildung) $\mathcal{B}(\mathcal{K}) \to V$, wenn es zwei Abbildungen $\alpha: G \to V$ und $\beta: M \to V$ gibt mit

$$\forall\ g \in G, m \in M\colon\ gIm \iff \alpha(g) \leq \beta(m).$$

2.2 Merkmalsimplikationen

Besonders wichtig ist natürlich die effiziente Ermittlung des Begriffsverbands eines vorgegebenen Kontextes. Hierzu überlegen wir uns erst einmal einige zweckmäßige Vereinfachungen des Kontextes, die den Begriffsverband unberührt lassen, aber den Aufwand beim Ermitteln der Begriffe verringern.
Natürlich kann man von gleichen Zeilen oder Spalten alle bis auf eine streichen, weil solche Zeilen oder Spalten ja zu Gegenständen bzw. zu Merkmalen gehören, die im Rahmen des gegebenen Kontextes nicht unterscheidbar sind. Wir nennen deshalb einen Kontext (G, M, I) *bereinigt,* wenn für Gegenstände und Merkmale gilt:

2.2.1 $$g' = h' \Longrightarrow g = h, \quad und \quad m' = n' \Longrightarrow m = n,$$

d. h. wenn die Ableitung sowohl auf G als auch auf M injektiv ist. Diese Streichung bzw. Zusammenfassung gleicher Zeilen und Spalten kann man formalisieren, es ergibt sich aus $\mathcal{K} = (G, M, I)$ der neue und nunmehr bereinigte Kontext $\mathcal{K}^* := (G^*, M^*, I^*)$ mit den Gegenständen und Merkmalen

$$g^* := \{h \in G \mid g' = h'\}, \ m^* := \{n \in M \mid m' = n'\}.$$

Wie gesagt, $\mathcal{K}^*$ ist bereinigt; vor allem aber gilt für die Begriffsverbände

2.2.2 $$\mathcal{B}(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{B}(\mathcal{K}^*).$$

Fragen wir uns, welche Gegenstände und Merkmale *nicht* gestrichen werden können, so gelangen wir zum Begriff der *Irreduzibilität:*

2.2.3 Definition (Irreduzible Elemente) *Ist $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband, $v \in V$, dann heißt v* $\wedge$-irreduzibel, *wenn*

$$v \neq \bigwedge\{x \in V \mid x > v\} =: v^\wedge,$$

also wenn v nicht als Infimum größerer Elemente geschrieben werden kann. Und ganz entsprechend heißt v $\vee$-irreduzibel, *wenn es nicht als Supremum kleinerer Elemente geschrieben werden kann:*

$$v \neq \bigvee\{x \in V \mid x < v\} =: v^\vee.$$

Die Menge aller $\wedge-$irreduziblen Elemente in V bezeichnen wir mit $I^\wedge(V)$, die Menge aller $\vee-$irreduziblen Elemente mit $I^\vee(V)$.

2.2.4 Hilfssatz *Ist V ein vollständiger Verband, dann gilt:*

- *Ein Element $v \in V$ ist genau dann $\wedge$-irreduzibel ($\vee$-irreduzibel), wenn es genau einen oberen (unteren) Nachbarn besitzt.*
- *Jede supremum-dichte (infimum-dichte) Teilmenge von V umfaßt alle $\vee$-irreduziblen ($\wedge$-irreduziblen) Elemente, also ganz $I^\vee(V)$ (ganz $I^\wedge(V)$).*
- *Ist V endlich, dann sind diese beiden Mengen die einzigen supremum-dichten bzw. infimum-dichten Teilmengen.*

Beweis: $v \in V$ ist, per definitionem, genau dann $\wedge$-irreduzibel, wenn $\wedge\{x \in V \mid x > v\} > v$ ist, und genau dann besitzt v genau einen oberen Nachbarn. Analoges gilt für die $\vee$-irreduziblen Elemente.
Die zweite Behauptung ist trivial, die dritte folgt per Induktion. Sei v nicht $\vee$-irreduzibel, also Supremum echt kleinerer Elemente, dann sind diese, nach Induktionsannahme, Suprema $\vee$-irreduzibler Elemente, was dann auch für v gilt.

$\square$

Ein Kontext $\mathcal{K}$ heißt *reduziert,* wenn er bereinigt und jeder Gegenstandsbegriff (g'', g') $\vee$-irreduzibel, jeder Merkmalsbegriff (m', m'') $\wedge$-irreduzibel ist.

2.2.5 Folgerung *Zu jedem endlichen Verband V gibt es, bis auf Isomorphie, genau einen reduzierten Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ mit $V \simeq \mathcal{B}(\mathcal{K})$, nämlich*

$$(G, M, I) := (I^\vee(V), I^\wedge(V), \leq).$$

Beweis: Ist V ein endlicher Verband, dann ist V auch vollständiger Verband. Der Kontext $(G, M, I) := (I^\vee(V), I^\wedge(V), \leq)$ ist offensichtlich reduziert. Zum Nachweis von $V \simeq \mathcal{B}(\mathcal{K})$ benutzt man 2.1.16 mit identischen Abbildungen γ auf $I^\vee(V)$ und μ auf $I^\wedge(V)$.

$\square$

Die Vorgehensweise bei der Reduzierung eines vorliegenden Kontextes ist also diese: Man faßt zunächst alle Gegenstände g und alle Merkmale m zusammen mit demselben Inhalt g' bzw. demselben Umfang m'. Schließlich streicht man alle Gegenstände g, deren Zeileninhalt g' sich als Schnitt anderer Zeileninhalte schreiben läßt. Entsprechend verfährt man mit Merkmalen m, deren Spaltenumfang Durchschnitt anderer Spaltenumfänge ist. Die letzten beiden Schritte kann man wie folgt durch Einführung von *Pfeilrelationen* formalisieren: Wenn g' maximal ist unter allen Zeileninhalten, in denen m nicht vorkommt, dann schreiben wir $g \swarrow m$, also

$$g \swarrow m \iff \neg(gIm) \wedge [g' \subset h' \Rightarrow hIm].$$

Entsprechend wird $g \nearrow m$ definiert:

$$g \nearrow m \iff \neg(gIm) \wedge [m' \subset n' \Rightarrow gIn].$$

Gilt beides, dann schreiben wir $g \mathrel{\swarrow\mkern-20mu\nearrow} m$, also

2.2.6 $$g \mathrel{\swarrow\mkern-20mu\nearrow} m \iff g \swarrow m \wedge g \nearrow m.$$

Man kann diese Doppelpfeilrelation auch mit Hilfe der sogenannten *Irreduzibilität* formulieren. Es gilt:

2.2.7 Satz *Sei $g \in G$ mit $g' \neq M$, sei $m \in M$ mit $m' \neq G$. Der Gegenstandsbegriff zu g, mit $g' \neq M$, bzw. der Merkmalsbegriff zu m, mit $m' \neq G$, ist genau dann $\vee$–irreduzibel bzw. $\wedge$–irreduzibel, wenn es $\widetilde{m}$ gibt mit $g \mathrel{\swarrow\mkern-20mu\nearrow} \widetilde{m}$ bzw. wenn es $\widetilde{g}$ gibt mit $\widetilde{g} \mathrel{\swarrow\mkern-20mu\nearrow} m$.*

Daraus ergibt sich die folgende formale Methode zur Reduzierung von Kontexten:

2.2.8 Folgerung *Trägt man die Pfeilrelationen 2.2.6 in den Kontext ein (durch Ersetzen entsprechender Nullen durch $\swarrow$ bzw. durch $\nearrow$), dann kann man ohne Veränderung des Begriffsverbandes alle Zeilen und alle Spalten streichen, die keinen Doppelpfeil enthalten.*

Hier ist ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix}
1 & \swarrow & \swarrow & 1 & 1 & \swarrow\mkern-20mu\nearrow \\
. & . & . & 1 & \nearrow & \nearrow \\
\swarrow & 1 & \swarrow & 1 & \swarrow\mkern-20mu\nearrow & 1 \\
. & . & . & \nearrow & 1 & \nearrow \\
\swarrow & \swarrow & 1 & \swarrow\mkern-20mu\nearrow & 1 & 1 \\
. & . & . & \nearrow & \nearrow & 1
\end{pmatrix}$$

Nach Streichen der Zeilen und Spalten ohne Doppelpfeil ergibt sich daraus

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & . \\
1 & . & 1 \\
. & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

Man kann alle Begriffe eines Kontextes (G, M, I) natürlich durch Bildung aller Paare (X'', X') zu allen Teilmengen $X \subseteq G$ ermitteln, das ist allerdings in der Regel sehr unökonomisch. Ein wesentlich besseres Verfahren (von Ganter) benutzt die Möglichkeit, die Potenzmenge von G *lexikographisch* anzuordnen. Dazu numeriert man G, d. h. man ersetzt G durch $\underline{n} := \{1, \ldots, n\}$, wenn $|G| = n$, und sagt, $X \subseteq G$ sei *lexikographisch kleiner* als $Y \subseteq G$ genau dann, wenn das kleinste Element, in dem sich X und Y unterscheiden, zu Y gehört:

2.2.9 $$X < Y \iff \exists i \in Y \backslash X \colon X \cap \underline{i-1} = Y \cap \underline{i-1}.$$

(Man überlegt sich leicht, daß dies tatsächlich die lexikographische Anordnung ist, wenn man jede Teilmenge von G als Binärfolge auffaßt, d. h. durch ihre charakteristische Funktion beschreibt.) Damit ist, für jedes $X \subset G$, der *lexikographisch kleinste Begriffsumfang oberhalb* X in (G, M, I) wohldefiniert, und es gilt, diesen zu beschreiben, und die Beschreibung in einen Algorithmus umzusetzen.

2.2.10 Satz *Der lexikographisch kleinste Begriffsumfang strikt oberhalb $X \subset G$ ist*

$$X \oplus i := ((X \cap \underline{i-1}) \cup \{i\})'',$$

wenn i das größte Element von G ist mit

$$X <_i X \oplus i,$$

und, für $A, B \subseteq G$, $A <_i B$ definiert ist durch

$$A <_i B \iff i \in B \backslash A \ \wedge \ A \cap \underline{i-1} = B \cap \underline{i-1}.$$

(D. h. die erste Ziffer i, also der kleinste Gegenstand, der weder in den beiden Mengen A und B liegt, noch in beiden fehlt, ist Element von B.)

Beweis:

i) Wegen $(X \oplus i)'' = X \oplus i$ ist $X \oplus i$ ein Begriffsumfang.

ii) Wir wollen mit X^+ den gesuchten *kleinsten* Begriffsumfang oberhalb von X bezeichnen, ein solcher existiert wegen $X \subset G$, denn G ist ein Begriffsumfang strikt oberhalb von X, und es gibt demnach einen kleinsten solchen.

iii) $X < X^+$ ergibt die Existenz von i mit $X <_i X^+$, nach Übungsaufgabe 2.2.1, Punkt i). Wir wollen zeigen, daß hierfür $X^+ = X \oplus i$ gilt.

iv) Nach Übungsaufgabe 2.2.1 iv) und v) gilt

$$X <_i X \oplus i \leq X^+.$$

Wegen der angenommenen Minimalität von X^+ ergibt das $X^+ = X \oplus i$. Es bleibt deshalb nur noch zu zeigen, daß dieses i tatsächlich maximal ist mit $X <_i X \oplus i$.

v) Gäbe es ein größeres j mit $X <_j X \oplus j$, dann würde (Übungsaufgabe 2.2.1 ii)) gelten:

$$X \oplus j < X \oplus i = X^+,$$

im Widerspruch zur angenommenen Minimalität von X^+.

$\square$

Die Umsetzung in einen Algorithmus zur Bestimmung aller Begriffe von (G, M, I) ist trivial. Man beginnt mit dem lexikographisch kleinsten Begriffsumfang, das ist $\emptyset''$, die Menge der Gegenstände, die *alle* Merkmale besitzen. Dann beginnt man mit $i = n$ nachzuprüfen, ob $\emptyset'' <_i \emptyset'' \oplus i$ gilt, usw.
Für Anwendungen der Begriffsanalyse ist natürlich eine Beschreibung all dessen von besonderer Bedeutung, was man aus einem Kontext herauslesen kann. Zum Beispiel kann man aus dem Kontext 1.1.3 mit den reellen Zahlen $2, \sqrt{2}, \pi$ als Gegenständen und mit einer Merkmalsmenge, die aus r wie rational, a wie algebraisch, i wie irrational und t wie transzendent besteht, herauslesen, daß jede der unter den Gegenständen vorkommenden rationale Zahl auch algebraisch ist, daß also $r \to a$ gilt (genauer: $r \to a$ gilt im vorgegebenen Kontext !). Einen solchen Zusammenhang bezeichnen wir als *Merkmalsimplikation,* und wir schreiben entsprechend $A \to B$, mit $A, B \subseteq M$, wenn für jedes $g \in G$ gilt:

$$[\ \forall a \in A\colon\ gIa] \Longrightarrow [\ \forall b \in B\colon\ gIb],$$

mit anderen Worten: $A \to B$ ist gleichbedeutend mit $A' \subseteq B'$, oder, wie man leicht nachweisen kann, mit $B \subseteq A''$. Die formale Definition für Merkmalsimplikationen sieht also so aus (für Teilmengen A und B der Merkmalsmenge M im betrachteten Kontext):

2.2.11 $$A \to B :\Longleftrightarrow A' \subseteq B' \ (\Longleftrightarrow\ B \subseteq A'').$$

Da es im Folgenden um Beziehungen zwischen *Implikationenmengen* geht, führen wir dazu noch die folgenden Bezeichnungen ein.

2.2.12 Definition (respektieren) *Ist (G, M, I) ein Kontext mit $A, B, X, X_i \subseteq M$, dann sagen wir*

- X respektiert *das Paar (A, B), wenn gilt:*

  $$A \subseteq X \Longrightarrow B \subseteq X,$$

  oder, äquivalent dazu, daß

  $$A \not\subseteq X \ \vee \ B \subseteq X,$$

  oder auch

  $$B \not\subseteq X \Longrightarrow A \not\subseteq X.$$

  Ist $A \to B$ eine Merkmalsimplikation, dann sagen wir genau dann, X respektiere diese, wenn X das Mengenpaar (A, B) respektiert.

- *Wir sagen, X* respektiert eine Menge *von Paaren von Merkmalsmengen, wenn X jedes einzelne dieser Paare respektiert. Entsprechend sei die Respektierung einer Menge von Merkmalsimplikationen definiert.*

- *Weiterhin sagen wir, daß ein Paar (A, B) von Merkmalsmengen von einem System $\{X_1, X_2, \ldots\}$ von Teilmengen $X_i \subseteq M$ respektiert wird, falls jedes dieser X_i das Paar (A, B) respektiert. Entsprechend wieder für Merkmalsimplikationen.*

$\diamond$

2.2.13 Hilfssatz *Ein Paar (A, B) von Merkmalsmengen ergibt genau dann eine Merkmalsimplikation $A \to B$, wenn (A, B) von jedem Zeileninhalt respektiert wird. (Man sagt dann auch kurz, $A \to B$* gilt *in (G, M, I).)*

Beweis:

i) Wir setzen zunächst voraus, $A \to B$ sei Merkmalsimplikation im Kontext (G, M, I), und es sei $g \in G$. Der Nachweis der Behauptung geht dann so:

$$A \subseteq g' \Longrightarrow g'' \subseteq A' \Longrightarrow g' = g''' \supseteq A'' \supseteq B.$$

ii) Gilt umgekehrt $A \not\subseteq g' \;\vee\; B \subseteq g'$, für jeden Zeileninhalt, und ist $h \in A'$, so ist $A \subseteq h'$, also $B \subseteq h'$, nach Voraussetzung, was $h \in B'$ impliziert. Dies gilt für jedes der Elemente von A', also ist $A' \subseteq B'$, d. h. $A \to B$ ist eine Merkmalsimplikation.

□

Will man nachprüfen, ob $A \to B$ gilt, dann genügt dazu natürlich die Prüfung von $A \to b$, einer Abkürzung für $A \to \{b\}$, für alle $b \in B$. Im Hassediagramm hat man dazu nachzuprüfen, ob b über dem Infimum der $a \in A$ liegt. Es hat jedoch wenig Sinn, *alle* Implikationen zu suchen, vielmehr wird man die Ermittlung eines *minimalen Systems* von Implikationen anstreben, aus denen alle anderen Implikationen folgen.

2.2.14 Definition (folgt, vollständig, reduziert) *Sei (G, M, I) ein Kontext. Wir sagen dann:*

- *Eine Implikation $A \to B$* folgt *aus einer Implikationenmenge $\mathcal{L}$, falls jedes $T \subseteq M$, das $\mathcal{L}$ respektiert, auch $A \to B$ respektiert.*
- *Die Implikationenmenge $\mathcal{L}$ heißt* vollständig*, wenn alle Merkmalsimplikationen von (G, M, I) aus $\mathcal{L}$ folgen,*
- *sie heißt* reduziert*, wenn kein $A \to B \in \mathcal{L}$ schon aus der Teilmenge $\mathcal{L} \backslash \{A \to B\}$ folgt.*

Unser Ziel ist die Angabe einer vollständigen und reduzierten Implikationenmenge $\mathcal{I}$ zu (G, M, I). Wir definieren dazu als *Pseudoinhalt* jede Teilmenge $P \subseteq M$ mit der folgenden Eigenschaft:

2.2.15 $$P \neq P'' \;\wedge\; [\text{Pseudoinhalt } Q \subset P \Rightarrow Q'' \subseteq P].$$

Mit Hilfe dieser rekursiven Definition — für die wir ab jetzt die *Endlichkeit von M voraussetzen* müssen — können wir jetzt den Hauptsatz formulieren:

2.2.16 Satz (Duquenne/Guigues) *Die folgende Menge von Implikationen*

$$\mathcal{I} := \{P \to P'' \mid P \textit{ Pseudoinhalt}\}$$

ist eine vollständige und reduzierte Implikationenmenge im Kontext (G, M, I) (wir nennen sie die Duquenne/Guigues–Basis *der Implikationenmenge).*

Beweis:

i) Für jedes $P \subseteq M$ ist $A \to B$, mit $A := P$ und $B := P''$ eine Merkmalsimplikation, denn $B = P'' \subseteq A'' = P''$. Die angegebene Menge $\mathcal{I}$ besteht also aus Merkmalsimplikationen.

ii) Als nächstes wollen wir zeigen, daß jedes $T \subseteq M$, das alle Elemente von $\mathcal{I}$ respektiert, ein Begriffsinhalt sein muß, d. h. es gilt $T = T''$. Wir beweisen dies indirekt, zeigen nämlich, daß $T \neq T''$ impliziert, daß T ein Pseudoinhalt ist und leiten daraus einen Widerspruch her: Q sei ein Pseudoinhalt mit $Q \subset T$. Da T die Merkmalsimplikation $Q \to Q''$ respektiert, gilt $Q \not\subseteq T$ oder $Q'' \subseteq T$, wegen $Q \subseteq Q''$ also jedenfalls $Q'' \subseteq T$. Wir hatten aber noch $T \neq T''$ angenommen, so daß demnach T ein Pseudoinhalt wäre, T also auch $T \to T''$ respektieren müßte. Das wiederum würde $T \not\subseteq T$ oder $T'' \subseteq T$ implizieren, keines von beiden kann aber richtig sein.

iii) Jede Teilmenge, die jedes Element von $\mathcal{I}$ respektiert, ist also ein Begriffsinhalt. Ein Begriffsinhalt respektiert aber *sämtliche* Merkmalsimplikationen $A \to B$ von (G, M, I):

$$A \subseteq T \Longrightarrow T' \subseteq A' \Longrightarrow A'' \subseteq T'' \Longrightarrow B \subseteq T'' = T.$$

iv) Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{I}$ reduziert ist. Dazu lassen wir eine Implikation weg, etwa $P \to P''$ und zeigen, daß der Rest $\mathcal{I}\backslash\{P \to P''\}$ durch eine Menge T respektiert wird, die *kein Begriffsinhalt ist,* so daß der Rest unvollständig sein muß. Tatsächlich respektiert $T := P$ diesen Rest. Ist nämlich $Q \to Q'' \in \mathcal{I}\backslash\{P \to P''\}$ mit $Q \subset P$, dann gilt nach 2.2.15: $Q'' \subseteq P$, also wird $Q \to Q''$ respektiert. Gilt zum andern zwar $Q \to Q'' \in \mathcal{I}\backslash\{P \to P''\}$, ist jedoch $Q \not\subseteq P$, dann wird diese Implikation ebenfalls von P respektiert, wegen 2.2.12.

Die Implikationenmenge $\mathcal{I}$ ist demnach auch reduziert.

□

Man kann die Duquenne-Guigues-Basis $\mathcal{I}$ der Menge aller Merkmalsimplikationen natürlich mit Hilfe der rekursiven Definition von Pseudoinhalten konstruieren, das ist allerdings sehr aufwendig. Zweckmäßiger ist es, die Pseudoinhalte in lexikographischer Reihenfolge zu erzeugen. Dazu benutzt man geeignete Hüllensysteme und Hüllenoperatoren, die die Ermittlung der Pseudoinhalte in lexikographischer Reihenfolge erlauben.

2.2.17 Hilfssatz *Ist $\mathcal{L}$ eine Menge von Merkmalsimplikationen in (G, M, I), dann ist*

$$\mathcal{H}(\mathcal{L}) := \{X \subseteq M \mid X \textit{ respektiert } \mathcal{L}\}$$

ein Hüllensystem.

Beweis: Die Menge M liegt in diesem System, denn M respektiert *alle* Merkmalsimplikationen. Ist $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{L})$, dann ist zu beweisen, daß $\cap\, \mathcal{T}$ jede Implikation $A \to B \in \mathcal{L}$ respektiert. Gilt aber $A \subseteq \cap\, \mathcal{T}$, dann gilt $A \subseteq T$, für alle $T \in \mathcal{T}$, und damit auch (da T die Implikation $A \to B$ respektiert) $B \subseteq T$, für alle $T \in \mathcal{T}$, also $B \subseteq \cap\, \mathcal{T}$.

□

2.2.18 Satz *Der Hüllenoperator $\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}$ zu dem Hüllensystem $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ aus 2.2.17 bildet $X \subseteq M$ auf eine Menge ab, die man wie folgt iterativ berechnen kann:*

- *Zunächst sei*

$$X^{\mathcal{L}} := X \bigcup \left(\bigcup_{X \supseteq A \to B \in \mathcal{L}} B \right).$$

- *Diesen Erweiterungsprozeß iterieren wir, bis er stagniert (M ist endlich!), bilden also*

$$X^{\mathcal{L}}, X^{\mathcal{L}^{(2)}} := \left(X^{\mathcal{L}}\right)^{\mathcal{L}}, \ldots$$

  bis schließlich

$$\mathcal{L}(X) := X^{\mathcal{L}^{(i)}} = X^{\mathcal{L}^{(i+1)}}.$$

Dafür gilt dann:

$$\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X) = \mathcal{L}(X).$$

Beweis:
i) $\mathcal{L}(X) \subseteq \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X)$:

a) Wegen $\mathcal{L}(X) \supseteq X \subseteq \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X)$ genügt es, wenn wir uns auf Elemente außerhalb von X konzentrieren.

b) Sei also $y \ni \mathcal{L}(X)\backslash X$. Wir haben zu zeigen, daß y in $\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X)$ liegt und nehmen an, daß

$$\mathcal{L}(X) = X^{\mathcal{L}^{(i)}}, \; i \text{ minimal.}$$

Wir induzieren nach i. Ist $i = 0$, dann ist nichts zu zeigen, $\mathcal{L}(X) = X$. Bei $i > 0$ ergibt die Induktionsannahme $X^{\mathcal{L}^{(i-1)}} \subseteq \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X)$. Sei deshalb $y \in \mathcal{L}(X)\backslash X^{\mathcal{L}^{(i-1)}}$ und entsprechend $X^{\mathcal{L}^{(i-1)}} \supseteq A \to B \ni y$. Ist jetzt $X \subseteq C \in \mathcal{H}(\mathcal{L})$, dann haben wir $y \in C$ zu beweisen. Das aber folgt so: Wegen $A \subseteq X^{\mathcal{L}^{(i-1)}} \subseteq \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X) \subseteq C$ gilt

$$A \not\subseteq C \;\vee B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C \Rightarrow y \in C.$$

ii) $\mathcal{L}(X) \supseteq \varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X)$: Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{L}(X)$ ganz $\mathcal{L}$ respektiert. Sei deshalb $A \to B \in \mathcal{L}$. Ist $A \subseteq \mathcal{L}(X)$, dann gilt $B \subseteq \mathcal{L}(X)^{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(X)$, was die Behauptung ergibt.

□

Mit Hilfe dieser Methode kann man *zu einer vorgegebenen Menge von Implikationen einen Kontext konstruieren, der gerade diese Implikationenmenge hat,* nämlich den Kontext

$$\mathcal{K}_{\mathcal{L}} := (\mathcal{H}(\mathcal{L}), M, \ni).$$

Seine Gegenstandsmenge ist nach 2.1.5

$$\mathcal{H}(\mathcal{L}) = \mathcal{H}(\mathcal{L})_{\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}}$$

$$= \{\varphi_{\mathcal{H}(\mathcal{L})}(X) \mid X \text{ respektiert } \mathcal{L}\} = \{\mathcal{L}(X) \mid X \text{ respektiert } \mathcal{L}\}.$$

Die Zeileninhalte sind die Mengen

$$\mathcal{L}(X)' = \{m \in M \mid m \in \mathcal{L}(X)\} = \mathcal{L}(X).$$

Demnach respektiert jeder Zeileninhalt von $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ die Implikationenmenge $\mathcal{L}$, die Elemente dieser Menge sind also auch Merkmalsimplikationen in $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Darüberhinaus enthält dieser Kontext aber unter Umständen noch weitere Implikationen, nämlich die Implikationen, die jetzt eingeführt werden sollen:

2.2.19 Definition *Eine Merkmalsimplikation $A \to B$ folgt* semantisch *aus $\mathcal{L}$, wenn jedes $T \subseteq M$, das $\mathcal{L}$ respektiert, auch die Implikation $A \to B$ respektiert.*

Der Kontext $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ enthält all diese Implikationen ebenfalls, denn jeder seiner Zeileninhalte respektiert $\mathcal{L}$ und damit auch (A, B), wenn $A \to B$ aus $\mathcal{L}$ folgt. Es gilt aber auch die Umkehrung: Folgt nämlich $A \to B$ semantisch aus $\mathcal{L}$, dann respektiert jeder Zeileninhalt von $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ auch das Mengenpaar (A, B), d. h. $A \to B$ ist auch Merkmalsimplikation in $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$. Wir haben also folgendes bewiesen:

2.2.20 Folgerung *Der Kontext $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}$ hat genau die Elemente von $\mathcal{L}$ und deren semantische Folgen als Merkmalsimplikationen.*

Dieser Kontext ist sozusagen der kleinste, in dem $\mathcal{L}$ und dessen semantische Folgen gelten.

2.2.21 Beispiel Nehmen wir eine Merkmalsmenge $M := \{1, 2, 3, 4\}$ aus vier Elementen und die Implikationenmenge

$$\mathcal{L} := \{1 \to 234, 3 \to 4\}.$$

Wir erhalten wie folgt das Hüllensystem $\mathcal{H}(\mathcal{L})$:

$X \subseteq M$	$X^{\mathcal{L}}$	$\mathcal{L}(X)$
1	1234	$1234 =: X_1$
2	2	$2 =: X_2$
3	34	$34 =: X_3$
4	4	$4 =: X_4$
12	1234	1234
13	1234	1234
14	1234	1234
23	234	$234 =: X_5$
24	24	$24 =: X_6$
34	34	34
123	1234	1234
124	1234	1234
134	1234	1234
234	234	234
1234	1234	1234

Die Inzidenzmatrix zu dem entsprechenden Kontext $(\mathcal{H}(\mathcal{L}), M, \ni)$ ist

$I_{\mathcal{L}}$	1	2	3	4
X_1	1	1	1	1
X_2	0	1	0	0
X_3	0	0	1	1
X_4	0	0	0	1
X_5	0	1	1	1
X_6	0	1	0	1

$\diamond$

Als nächstes Beispiel soll ein Hüllensystem vorgestellt werden, das die lexikographische Konstruktion von Begriffs- oder Pseudoinhalten ermöglicht. Zunächst ein vorbereitender Hilfssatz:

2.2.22 Hilfssatz *Sind P und Q Begriffs- oder Pseudoinhalte mit $P \not\subseteq Q \not\subseteq P$, dann ist $P \cap Q$ ein Begriffsinhalt.*

Beweis: Ein Begriffs- oder Pseudoinhalt P respektiert alle Elemente von $\mathcal{I} \backslash \{P \to P''\}$ $(= \mathcal{I}$, falls P Begriffsinhalt ist): Wir schließen indirekt. Respektiert P etwa $R \to R'' \in \mathcal{I}$ *nicht,* so gilt

$$R \subseteq P \ \wedge R'' \not\subseteq P. \qquad (1)$$

Ist jetzt P ein Pseudoinhalt, so folgt $R \neq P$, also $R \subset P$ und damit $R'' \subseteq P$, im Widerspruch zu (1). Falls dagegen P ein Begriffsinhalt ist, gilt, wegen $R \subseteq P$, daß $R'' \subseteq P'' = P$, ebenfalls im Widerspruch zu (1). Sind jetzt P und Q Begriffs- oder Pseudoinhalt mit $P \not\subseteq Q \not\subseteq P$, dann respektiert, wegen $P \cap Q \subset P, Q$, deren Schnitt *ganz* $\mathcal{I}$: Ist $R \to R'' \in \mathcal{I}$, dann gilt ja

$$R \subseteq P \cap Q \Rightarrow R \neq P \Rightarrow P \text{ resp. } R \to R'' \Rightarrow_{R \subseteq P} R'' \subseteq P.$$

Analog erhält man $R'' \subseteq Q$, so daß sich insgesamt ergibt: $R'' \subseteq P \cap Q$. Da also $P \cap Q$ ganz $\mathcal{I}$ respektiert, muß dieser Schnitt, nach Teil ii) vom Beweis des Satzes von Duquenne/Guigues, ein Begriffsinhalt sein.

$\square$

2.2.23 Folgerung *Das System*

$$\mathcal{H} := \{T \subseteq M \mid T \textit{ ist Begriffs- oder Pseudoinhalt}\}$$

ist ein Hüllensystem.

2.2.24 Satz *Der Hüllenoperator $\varphi_{\mathcal{H}}$ zum System $\mathcal{H}$ der Begriffs- oder Pseudoinhalte sieht so aus:*

- *Zu $X \subseteq M$ sei*
$$X^* := X \bigcup \left(\bigcup_{X \supset A \to B \in \mathcal{I}} B \right).$$

- *Dies iterieren wir, d. h. wir bilden $X^{(2)} := (X^*)^*, \ldots,$ bis zur Stagnation:*
$$\mathcal{I}^*(X) = X^{(i)} = X^{(i+1)},$$

es ist dann
$$\varphi_{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{I}^*(X).$$

Beweis:
i) $\mathcal{I}^*(X) \subseteq \varphi_{\mathcal{H}}(X)$:
$$\varphi_{\mathcal{H}}(X) = \bigcap \{Y \subseteq M \mid X \subseteq Y, Y \text{ Begriffs- oder Pseudoinhalt}\}.$$

Es genügt also wieder (vgl. den Beweis von 2.2.18) die Betrachtung von Elementen außerhalb X. Sei $\mathcal{I}^*(X) = X^{(i)}$, mit minimalem i. Wir induzieren nach i.
Die Induktionsbasis ist klar, da $X^{(0)} = X$. Ist $i > 0$, dann heißt die Induktionsannahme $X^{(i-1)} \subseteq \varphi_{\mathcal{H}}(X)$. Für $y \in \mathcal{I}^*(X) \backslash X^{(i-1)}$ gibt es eine Implikation $A \to B \in \mathcal{I}$ mit der Eigenschaft:
$$X^{(i-1)} \supset A \ \wedge y \in B.$$

Ist jetzt $X \subseteq Y \subseteq M$, und Y ein Begriffs- oder Pseudoinhalt, dann gilt $X^{(i-1)} \subseteq Y$, also $A \subset Y$, und wir unterscheiden jetzt, je nachdem ob Y Pseudoinhalt oder Begriffsinhalt ist, die beiden Fälle:
a) Ist Y Pseudoinhalt, dann gilt $B = A'' \subseteq Y$, also $y \in Y$.
b) Ist Y Begriffsinhalt, dann folgern wir so: $A \subseteq Y$ impliziert $A'' = B \subseteq Y$, und demnach $y \in Y$.
ii) Für die Umkehrung $\varphi_{\mathcal{H}}(X) \subseteq \mathcal{I}^*(X)$ genügt der Beweis, daß $\mathcal{I}^*(X)$ Begriffs- oder Pseudoinhalt ist. Hierzu betrachten wir einen Pseudoinhalt $Q \subset \mathcal{I}^*(X)$. Wegen
$$\mathcal{I}^*(X) = \mathcal{I}^*(X)^* = \mathcal{I}^*(X) \bigcup \left(\bigcup_{\mathcal{I}^*(X) \supset R \to R'' \in \mathcal{I}} R'' \right)$$

folgt $Q'' \subseteq \mathcal{I}^*(X)$, $\mathcal{I}^*(X)$ ist also Pseudoinhalt, falls $\mathcal{I}^*(X) \neq \mathcal{I}^*(X)''$. Im Falle $\mathcal{I}^*(X) = \mathcal{I}^*(X)''$ ist $\mathcal{I}^*(X)$ Begriffsinhalt.

□

Daraus ergibt sich der

2.2.25 Satz *Sei $M = \underline{n}$ und $<_i$ wie oben definiert. Dann gilt*

- *Der lexikographisch kleinste Begriffs- oder Pseudoinhalt ist $\emptyset$.*
- *Der lexikographisch kleinste Begriffs- oder Pseudoinhalt oberhalb der Menge $X \subseteq M$ ist*

  $$\mathcal{I}^*((X \cap \underline{i-1}) \cup \{i\}),$$

  wenn i maximal ist mit

  $$X <_i \mathcal{I}^*((X \cap \underline{i-1}) \cup \{i\}).$$

Eine wichtige Anwendung beschreibt der folgende Satz. Er zeigt nämlich, wie man einen Kontext aufstellen kann, der die "richtigen" Gegenstände umfaßt, insbesondere hinreichend viele solche Gegenstände, damit keine unerwünschten Implikationen bleiben:

2.2.26 Satz *Ist (G, M, I) Kontext mit $P_1, \ldots, P_n$ als lexikographisch kleinsten Pseudoinhalten, in lexikographischer Reihenfolge numeriert, dann kann man G um $\widetilde{g}$ erweitern, wenn $\widetilde{g}'$ die Implikationen $P_i \to P_i''$ respektiert; in dem neuen Kontext $(\widetilde{G}, M, \widetilde{I})$, mit $\widetilde{G} := G \cup \{\widetilde{g}\}$, sind dann ebenfalls $P_1, \ldots, P_n$ die lexikographisch kleinsten Pseudoinhalte, und zwar in lexikographischer Numerierung.*

Beweis: Wir kürzen mit $\mathcal{K}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{K}}$ die Kontexte (G, M, I) bzw. $(\widetilde{G}, M, \widetilde{I})$ ab. Außerdem bedeute, für $T \subseteq M$, $T'_{\mathcal{K}}$ bzw. $T'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ die jeweilige Ableitung in $\mathcal{K}$ bzw. in $\widetilde{\mathcal{K}}$. Das Beweisverfahren ist vollständige Induktion nach n.

- Der Fall $n = 1$: Wir wollen die Behauptung indirekt beweisen, nehmen deshalb an, es sei Q ein in $\widetilde{\mathcal{K}}$ lexikographisch kleinerer Pseudoinhalt als P_1. Offensichtlich gilt $Q'_{\mathcal{K}} \subseteq Q'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$, und damit auch

  $$Q''_{\widetilde{\mathcal{K}}} \subseteq Q''_{\mathcal{K}}.$$

  Nun ist aber, weil Q Pseudoinhalt in $\widetilde{\mathcal{K}}$ ist, $Q \subset Q''_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ und demnach auch $Q \neq Q''_{\mathcal{K}}$. Weil P_1 der lexikographisch kleinste Pseudoinhalt von $\mathcal{K}$ ist, sind alle darin echt enthaltenen Teilmengen, die von ihrer zweiten Ableitung verschieden sind, Pseudoinhalte. Q wäre demnach Pseudoinhalt in $\mathcal{K}$, im Widerspruch zur Minimalität von P_1.

- Der Fall $n > 1$: Nach Induktionsannahme sind $P_1, \ldots, P_{n-1}$ die lexikographisch kleinsten Pseudoinhalte von $\widetilde{\mathcal{K}}$, in lexikographischer Reihenfolge. Der Zeileninhalt $\widetilde{g}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ des hinzugefügten Gegenstandes respektiert $(P_i, (P_i)''_{\widetilde{\mathcal{K}}})$, für $i = 1, \ldots, n$. Wir haben zu zeigen, daß P_n tatsächlich der lexikographische Nachfolger von P_{n-1} (unter den Pseudoinhalten von $\widetilde{\mathcal{K}}$) ist. Wir beweisen wieder indirekt. Dazu nehmen wir an, es sei Q ein Pseudoinhalt von $\widetilde{\mathcal{K}}$, und es gelte

$$P_{n-1} < Q < P_n.$$

  Ganz analog zur Argumentation im vorangegangenen Punkt erhalten wir daraus, daß Q Pseudoinhalt auch in $\mathcal{K}$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß dort P_n der Pseudoinhalt ist, der dem Pseudoinhalt P_{n-1} unmittelbar nachfolgt.

Damit ist alles bewiesen.

□

Dieses Ergebnis ermöglicht die interaktive Erstellung eines Kontextes zu gegebenen Implikationen:

2.2.27 Algorithmus zum Erstellen eines Kontextes:

- *Beginne mit $G := \emptyset$.*
- *Konstruiere die Pseudoinhalte in lexikographischer Reihenfolge: $P_1, P_2, \ldots$*
  - *Wurde gerade P_n konstruiert, so prüfe nach, ob $P_n \to P_n''$ gelten soll oder nicht. Wenn nicht, so füge ein Gegenbeispiel hinzu, andernfalls ermittle den lexikographisch nächsten Pseudoinhalt.*
  - *Dies tut man solange, bis alle Elemente der Implikationenbasis ermittelt und akzeptabel sind.*

In vielen Fällen lassen sich hiermit auch Kontexte mit *unendlichen Gegenstandsmengen* behandeln, zum Beispiel der Kontext aus den reellen Zahlen mit den Merkmalen ganzrational, rational, irrational,

algebraisch und transzendent. Dies ist für uns sehr wichtig, weil viele mathematische Situationen von dieser Art sind. Das Ziel ist dabei natürlich, eine *endliche und möglichst kleine* Teilmenge $T \subset G$ derart zu finden, daß der hierauf eingeschränkte Kontext $(T, M, I \cap (T \times M))$ eine Implikationenbasis hat, die aus lauter akzeptablen Implikationen besteht.
Will man dies anwenden, dann kann man in folgender Weise vorgehen. Man baut T sukzessive auf und berechnet nach jedem Schritt, also nach jeder Hinzunahme eines neuen Gegenstands, den lexikographisch nächsten Pseudoinhalt, also $P \to P''$. Gilt diese Implikation in der Erweiterung von (G, M, I), dann wird sie akzeptiert, andernfalls muß ein Gegenbeispiel dazu gesucht und hinzugenommen werden. *Dies geschieht solange bis die neue Duquenne–Guigues–Basis aus lauter akzeptierten Implikationen besteht.* Betrachten wir ein Beispiel.

2.2.28 Beispiel Gegenstände seien Dreiecke, als Merkmalsmenge nehmen wir die Menge

$$M := \{rw, schw, stw, spw, gs, ugs, gsch\},$$

bestehend aus den Merkmalen *rechtwinklig, schiefwinklig, stumpfwinklig, spitzwinklig, gleichseitig, ungleichseitig, gleichschenklig.* Wir setzen entsprechende Kenntnisse aus der Elementargeometrie voraus, wir nehmen also an, daß wir einer Implikation ansehen, ob sie richtig ist oder nicht. Dann geben wir Dreiecke, also Gegenstände vor und untersuchen den jeweils entstehenden Kontext, d. h. die Elemente der Duquenne/Guiges–Basis darauf, ob alle ihre Implikationen akzeptabel sind oder nicht.
Ausgangspunkt ist der Kontext $\mathcal{K}_0$ mit obiger Merkmalsmenge M, die Gegenstandsmenge ist zunächst leer. Bei leerer Gegenstandsmenge sind aber *alle* Implikationen richtig, $\emptyset \to \emptyset'' = M$ ist eine Merkmalsimplikation. Es stellt sich deshalb die Frage, ob tatsächlich sämtliche Dreiecke alle der oben aufgeführten Merkmale haben. Wir wissen aber, daß dies nicht richtig ist. Wir fügen deshalb solange Dreiecke D_i mit unterschiedlichen Eigenschaften, also unterschiedlichem Zeileninhalt hinzu, bis $\emptyset$ kein Pseudoinhalt ist, und damit $\emptyset \to \emptyset''$ kein Element der Implikationenbasis. Die in die anfangs leere Gegenstandsmenge aufzunehmenden Dreiecke geben wir durch die Koordinaten seiner Eckpunkte in der reellen Zahlenebene an.
Wegen $\emptyset'' = M$ fügen wir im ersten Schritt also solange Dreiecke hinzu, bis keine der Spalten des entsprechenden Kontextes lauter Einsen

enthält. Wir können beispielsweise die folgenden vier Dreiecke verwenden:

$$D_1 : (0,0), (6,0), (3,1),$$

$$D_2 : (0,0), (1,0), (0,1).$$

$$D_3 : (0,0), (4,0), (1,2).$$

$$D_4 : (0,0), (2,0), (1,\sqrt{3}).$$

Der entstandene Kontext hat also die folgende Form:

$\mathcal{K}_1$	rw	$schw$	stw	spw	gs	ugs	$gsch$
D_1	0	1	1	0	0	1	1
D_2	1	0	0	0	0	1	1
D_3	0	1	0	1	0	1	0
D_4	0	1	0	1	1	0	1

.

Wir berechnen hierfür den kleinsten Pseudoinhalt: Ausgehend von $\emptyset$ bilden wir $\emptyset^*$, das ist wieder $\emptyset$. Demnach ist $\mathcal{I}^*(\emptyset) = \{7\} = \{gsch\}$. Wegen $\{gsch\}'' = \{gsch\}$ ist diese Menge ein Begriffsinhalt, kein Pseudoinhalt.
Der nächste Schritt bringt als nächstgrößeren Begriffs- oder Pseudoinhalt die Menge $\{6\} = \{ugs\}$, also erneut einen Begriffsinhalt. Dann kommt aber $\{5\} = \{gs\}$, ein Pseudoinhalt. Das erste Element der Implikationenbasis von $\mathcal{K}_1$ ist demnach

$$\{gs\} \to \{schw, spw, gsch\},$$

eine Implikation, die wir akzeptieren. Die nächste ist dann

$$\{spw\} \to \{schw\},$$

eine ebenfalls akzeptable Implikation. Danach ergibt sich aber (etwa mit dem Programmsystem DISCRETA)

$$\{stw\} \to \{schw, ugs, gsch\}.$$

Nun ist aber offenbar nicht jedes stumpfwinklige Dreieck auch gleichschenklig, wir müssen den Kontext also um ein entsprechendes Gegenbeispiel erweitern, dazu nehmen wir

$$D_5 : (0,0), (2,0), (5,1).$$

Entsprechend geht es weiter. Unter Zuhilfenahme der Dreiecke

$$D_6 : (0,0), (2,0), (1,3), D_7 : (0,0), (2,0), (0,1)$$

ergibt sich schließlich der folgende Kontext (G, M, I):

$G\backslash M$	rw	$schw$	stw	spw	gs	ugs	$gsch$
D_1	0	1	1	0	0	1	1
D_2	1	0	0	0	0	1	1
D_3	0	1	0	1	0	1	0
D_4	0	1	0	1	1	0	1
D_5	0	1	1	0	0	1	0
D_6	0	1	0	1	0	1	1
D_7	1	0	0	0	0	1	0

Die Duquenne–Guigues–Basis hierfür ist

$$\begin{aligned}
\{gs\} &\to \{schw, spw, gsch\},\\
\{spw\} &\to \{schw\},\\
\{stw\} &\to \{schw, ugs\},\\
\{schw, spw, gs, ugs, gsch\} &\to \{rw, stw\},\\
\{schw, stw, spw, ugs\} &\to \{rw, gs, gsch\},\\
\{rw\} &\to \{ugs\},\\
\{rw, schw, ugs\} &\to \{stw, spw, gs, gsch\}.
\end{aligned}$$

All diese Implikationen sind akzeptabel, nach dem was wir aus der Elementargeometrie wissen. Wir sind also fertig, obiger Kontext mit sieben Gegenständen $D_1, \ldots, D_7$ und den Merkmalen $rw, \ldots, gsch$ gibt also unser Wissen um Dreiecke und die angeführten Merkmale vollständig wieder!
Der Leser bemerkt natürlich, daß diese Basis u. a. mit

$$\{schw, spw, gs, ugs, gsch\} \to \{rw, stw\}$$

auch Implikationen enthält, wo die Prämisse kontradiktorische Merkmale, wie etwa gs und ugs, umfaßt. Solche Prämissen sind falsch, die Implikationen deshalb richtig. Es ist jedoch zu beachten, daß dies unser Wissen um die Elementargeometrie erfordert, also die Kenntnis einer unendlichen Menge, während bei diesem Stand der Dinge, d. h. bei dem vorliegenden Kontext mit 7 Gegenständen, *nicht klar sein kann,* ob dies für *alle* Dreiecke kontradiktorisch ist, oder ob es nicht doch Dreiecke geben kann, die sowohl das Merkmal gs als auch das Merkmal ugs haben! Entsprechendes gilt für $schw$ und rw, stw und spw. $\diamond$

Wir wollen diese Resultate über Merkmalsimplikationen und Implikationenbasen auch für *mehrwertige* Kontexte verwenden. Ein solcher Kontext ist ein Quadrupel

$$\mathcal{K} := (G, M, W, I),$$

die Inzidenzrelation ist jetzt eine Teilmenge $I \subseteq G \times M \times W$, also dreistellig. Die Einträge in der Inzidenzmatrix sind, abgesehen von 0 oder Leerzeichen, die Werte von W. Ist $m(g) = w$, so haben wir dies als eine *Merkmalsausprägung* bezeichnet. Ein Merkmal m wollen wir nun als *vollständig* bezeichnen, wenn in seiner Spalte keine Null oder kein Leerzeichen vorkommt, d. h. wenn

$$dom(m) := \{g \in G \mid \exists\ w \in W : (g, m, w) \in I\} = G$$

gilt. Der Kontext $\mathcal{K}$ heißt *vollständig,* wenn jedes seiner Merkmale vollständig ist, d. h. wenn in der Inzidenzmatrix keinerlei Nullen bzw. Leerstellen vorkommen.

2.2.29 Definition *Ist $\mathcal{K}$ ein vollständiger Kontext, dann heißt die Merkmalsmenge Y*

- funktional abhängig *von X, wenn für alle Gegenstandspaare g, h gilt:*

$$[\forall\ x \in X : x(g) = x(h)] \implies [\forall\ y \in Y : y(g) = y(h)].$$

- ordinal abhängig *von X, wenn alle Bilder $x(G)$ geordnet sind:*

$$(x(G), \leq_x),$$

und für diese Halbordnungen und alle Gegenstandspaare gilt:

$$[\forall\ x \in X : x(g) \leq_x x(h)] \implies [\forall\ y \in Y : y(g) \leq_y y(h)].$$

$\diamond$

Offensichtlich impliziert ordinale die funktionale Abhängigkeit. Beide Abhängigkeiten können mit Hilfe geeigneter Kontexte auf Implikationen zurückgeführt werden. Dazu definieren wir zu $\mathcal{K} = (G, M, I)$ den Kontext

$$\mathcal{K}_o := (G \times G, M, I_o),$$

mit der Inzidenzrelation

$$(g, h) I_o m :\Longleftrightarrow\ m(g) \leq_m m(h),$$

sowie

$$\mathcal{K}_f := (\binom{G}{2}, M, I_f),$$

mit

$$\{g, h\} I_f m :\Longleftrightarrow\ m(g) = m(h).$$

Man kann leicht nachprüfen, daß hierfür gilt:

2.2.30 Hilfssatz *Die Merkmalsmenge Y ist genau dann funktional (ordinal) abhängig von X, wenn $X \to Y$ Merkmalsimplikation ist in $\mathcal{K}_f$ ($\mathcal{K}_o$).* □

Beweis:

i) (X, Y) definiert genau dann eine Merkmalsimplikation $X \to Y$ in $\mathcal{K}_f$, wenn $X' \subseteq Y'$, also wenn

$$X' = \{\{g, h\} \in \binom{G}{2} \mid \forall\, x \in X \colon x(g) = x(h)\}$$

$$\subseteq Y' = \{\{g, h\} \in \binom{G}{2} \mid \forall\, y \in Y \colon y(g) = y(h)\}.$$

Dies bedeutet aber gerade die funktionale Abhängigkeit der Merkmalsmenge Y von X.

ii) (X, Y) definiert genau dann eine Merkmalsimplikation $X \to Y$ in $\mathcal{K}_o$, wenn $X' \subseteq Y'$, also wenn

$$X' = \{(g, h) \in G^2 \mid \forall\, x \in X \colon x(g) \leq_x x(h)\}$$

$$\subseteq Y' = \{(g, h) \in G^2 \mid \forall\, y \in Y \colon y(g) \leq_y y(h)\}.$$

Dies bedeutet aber gerade die ordinale Abhängigkeit der Merkmalsmenge Y von X.

$\square$

Übungen

Ü 2.2.1 Zeigen Sie, daß $<_i$ die folgenden Eigenschaften hat:

i) $A < B \iff \exists\, i \in G\colon A <_i B$.

ii) $A <_i B, A <_j C$, mit $i < j$, dann gilt $C <_i B$.

iii) $i \notin A$, dann ist $A < A \oplus i$.

iv) $A <_i B$, für einen Begriffsumfang B, dann gilt $A \oplus i \subseteq B$, und damit auch $A \oplus i \leq B$.

v) Ist $A <_i B$, für einen Begriffsumfang B, dann ist $A <_i A \oplus i$.

2.3 Die Automorphismengruppe des Kontextes

Erinnern wir uns an die Definition der Kontextklassen: Ein einwertiger Kontext $\mathcal{K} = (G, M, I)$ kann ja als Abbildung von $G \times M$ in die Menge $\{0, 1\}$ aufgefaßt werden, also

$$(G, M, I) \in \{0, 1\}^{G \times M}.$$

Für mehrwertige Kontexte $\mathcal{K}$ haben wir entsprechend:

$$(G, M, W, I) \in (W \cup \{0\})^{G \times M}.$$

Auf beiden Mengen von Abbildungen operiert das direkte Produkt $S_G \times S_M$ der symmetrischen Gruppen auf G und M, und die dabei entstehenden Bahnen sind die *Kontextklassen* zur Gegenstandsmenge G und Merkmalsmenge M. Die Mengen all dieser Klassen sind also die Bahnenmengen

$$S_G \times S_M \backslash\backslash \{0, 1\}^{G \times M} \quad \text{bzw.} \quad S_G \times S_M \backslash\backslash (W \cup \{0\})^{G \times M}.$$

Der Stabilisator von $\mathcal{K}$, den wir auch als *Automorphismengruppe* von $\mathcal{K}$ bezeichnen, hat die folgende Gestalt:

$$Aut(\mathcal{K}) := (S_{G \times M})_{\mathcal{K}} = \bigoplus_{w \in W \cup \{0\}} S_{\mathcal{K}^{-1}(w)}.$$

Diese Automorphismengruppe besteht genau aus den $\gamma = (\alpha, \beta) \in S_G \times S_M$, die folgenden Bedingungen genügen:

$$(g, m) \in I \iff (\alpha(g), \beta(m)) \in I,$$

im einwertigen Fall, bzw.

$$(g, m, w) \in I \iff (\alpha(g), \beta(m), w) \in I$$

bei mehrwertigen Kontexten.

2.3.1 Hilfssatz *Ist $\gamma = (\alpha, \beta) \in Aut(\mathcal{K})$, dann gilt für die Ableitungen jeder Teilmenge A von G oder M :*

$$\alpha(A)' = \beta(A'), \alpha(A)'' = \alpha(A''), \ldots$$

und für jede Teilmenge B von M entsprechend

$$\beta(B)' = \alpha(B'), \beta(B)'' = \beta(B''), \ldots.$$

Beweis: Für $A \subseteq G$ ist der Bijektivität von β auf M zufolge

$$\begin{aligned}
\alpha(A)' &= \{m \in M \mid \forall\, g \in \alpha(A) \colon gIm\} \\
&= \{m \in M \mid \forall\, a \in A \colon \alpha(a)Im\} \\
&= \{\beta(m) \in M \mid \forall\, a \in A \colon \alpha(a)I\beta(m)\} \\
&= \{\beta(m) \in M \mid \forall\, a \in A \colon aIm\} \\
&= \beta(\{m \in M \mid \forall\, g \in A \colon aI\beta(m)\}) \\
&= \beta(A').
\end{aligned}$$

Die Behauptungen über die höheren Ableitungen (für einwertige Kontexte) ergeben sich daraus iterativ, die entsprechenden Aussagen über mehrwertige Kontexte folgen analog.

□

Eine unmittelbare Konsequenz hiervon ist, daß jedes Element der Automorphismengruppe des Kontextes Begriffe in Begriffe überführt, eventuelle Inklusionen bleiben dabei natürlich erhalten, d. h. es gilt für alle γ in $Aut(\mathcal{K})$ und alle Begriffe $(A_1, B_2), (A_2, B_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$:

2.3.2 $\qquad (A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \iff \gamma(A_1, B_1) \leq \gamma(A_2, B_2).$

Die Automorphismengruppe $Aut(\mathcal{K})$ operiert auf dem Begriffsverband von $\mathcal{K}$ demnach als Gruppe von ordnungserhaltenden Automorphismen. Wir wollen dies so abkürzen:

$$_{Aut(\mathcal{K})}\,(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \leq)\,.$$

Wir können also die Mittel der Theorie der verbandstreuen Gruppenoperationen auf Verbänden (vgl. etwa [12]) anwenden, wie z. B. das folgende Resultat:

2.3.3 Hilfssatz *Ist $\mathcal{K}$ ein endlicher Kontext, dann gilt für die induzierte Operation seiner Automorphismengruppe $Aut(\mathcal{K})$ auf dem Begriffsverband $\mathcal{B}(\mathcal{K})$:*

- *Je zwei Elemente in derselben Bahn sind unvergleichbar, d. h. die Bahnen einer solchen Operation sind Antiketten.*
- *Die Bahnen ω_i von $Aut(\mathcal{K})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ können so numeriert werden, daß gilt:*

$$\omega_j \ni (A, B) \leq (C, D) \in \omega_k \Longrightarrow j \leq k.$$

- *Für jede Bahn ω und jedes $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ hängen die Anzahlen*
$$|\{(C,D) \in \omega \mid (A,B) \leq (C,D)\}|$$
und
$$|\{(C,D) \in \omega \mid (A,B) \geq (C,D)\}|$$
nur von der (A,B) enthaltenden Bahn und nicht von (A,B) ab.

- *Für alle $(A,B),(C,D) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ haben wir*
$$\frac{|\{(E,F) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) \mid (A,B) \leq (E,F) \in Aut(\mathcal{K})((C,D))\}|}{|\{(H,K) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) \mid (C,D) \geq (H,K) \in Aut(\mathcal{K})((A,B))\}|} =$$
$$\frac{|Aut(\mathcal{K})((C,D))|}{|Aut(\mathcal{K})((A,B))|}.$$

Beweis:
i) Wäre $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $\gamma(A,B)$ $(\neq (A,B))$ vergleichbar, o.B.d.A. etwa $(A,B) < \gamma(A,B)$, hätten wir wegen der Endlichkeit von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ — und damit der von $Aut(\mathcal{K})$ — den Widerspruch
$$(A,B) < \gamma(A,B) < \gamma^2(A,B) < \ldots < \gamma^{-1}(A,B) < (A,B).$$
ii) Betrachten wir
$$(A,B),(C,D) \in \omega_i, (E,F),(H,K) \in \omega_k, \text{ mit } (A,B) < (E,F),$$
also i) zufolge $\omega_i \neq \omega_k$, und setzen wir o.B.d.A. (C,D) und (H,K) als vergleichbar an. Wäre $(C,D) > (H,K)$, so für geeignete $\gamma, \gamma' \in Aut(\mathcal{K})$ auch
$$\gamma(A,B) = (C,D) > (H,K) = \gamma'(E,F),$$
und daher ergäbe sich $(H,K) > (A,B) > \gamma^{-1}\gamma'(E,F)$, wegen $\gamma^{-1}\gamma' \in Aut(\mathcal{K})$ also ein Widerspruch zu i). Mithin ist $(C,D) < (H,K)$, die Repräsentantenunabhängigkeit erwiesen, und die Bahnen können auf Grund ihrer endlichen Anzahl wie behauptet numeriert werden.
iii) ist klar wegen 2.3.2
iv) folgt mit Hilfe einer trivialen "doppelten Abzählung". Wir betrachten den bipartiten Graphen, der aus den Bahnen $Aut(\mathcal{K})((A,B))$ und $Aut(\mathcal{K})((C,D))$ besteht, wobei vergleichbare Elemente durch eine Kante verbunden sind (vgl. Abbildung 2.1).

□

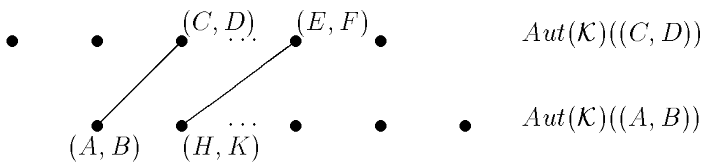


Abbildung 2.1: Zwei Bahnen auf der Halbordnung

Der Begriffsverband $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$ definiert neben der Halbordnung $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \leq)$, mit der *Unter-* und *Oberbegriffe* eingeführt worden waren, die beiden *Halbgruppen* $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \wedge)$ und $(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \vee)$. Die Operationen der Elemente der Automorphismengruppe $Aut(\mathcal{K})$ erhalten Mengeninklusionen, also ist das Bild eines Infimums zweier Begriffe das Infimum der Bilder von diesen, entsprechend für das Supremum. Die Operation der Automorphismengruppe ist also auch mit diesen Verknüpfungen kompatibel: Für Begriffe $(A, B), (C, D)$ und Elemente $\gamma \in Aut(\mathcal{K})$ gilt

$$\gamma\left((A, B) \wedge (C, D)\right) = \gamma(A, B) \wedge \gamma(C, D),$$

sowie

$$\gamma\left((A, B) \vee (C, D)\right) = \gamma(A, B) \vee \gamma(C, D).$$

Die Automorphismengruppe des Begriffsverbands operiert also auch auf diesen Halbgruppen, und zwar als Gruppe von Automorphismen:

$$_{Aut(\mathcal{K})}\left(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \wedge\right), \ _{Aut(\mathcal{K})}\left(\mathcal{B}(\mathcal{K}), \vee\right).$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Bahnen ω_i der Automorphismengruppe auf dem Begriffsverband gemäß 2.3.3 numeriert sind, und wir definieren, zu vorgegebenem $(A, B) \in \omega_i$, die Anzahlen

$$a_{ik}^{\wedge} := |\{(C, D) \in \omega_k \mid (A, B) \leq (C, D)\}|.$$

sowie die Anzahlen

$$a_{ik}^{\vee} := |\{(C, D) \in \omega_k \mid (A, B) \geq (C, D)\}|.$$

Aus diesen Anzahlen bilden wir die obere Dreiecksmatrix $A^{\wedge} := (a_{ik}^{\wedge})$ und die untere Dreiecksmatrix $A^{\vee} := (a_{ik}^{\vee})$. Die Hauptdiagonale beider Matrizen besteht aus Einsen, beide Matrizen sind also invertierbar über $\mathbb{Z}$. Darüber hinaus hängen die Elemente dieser Matrizen über folgende Gleichung zusammen.

$$|\omega_i| \cdot a_{ik}^{\wedge} = |\omega_k| \cdot a_{ki}^{\vee}.$$

Jetzt betrachten wir die *Halbgruppen* $(\mathcal{B}(\mathcal{K}),\wedge), (\mathcal{B}(\mathcal{K}),\vee)$, auf denen $Aut(\mathcal{K})$ ja strukturerhaltend operiert. Hier gilt

2.3.4 Hilfssatz *Für alle Bahnennummern i,j,k und ein festes $(E,F)\in\omega_k$ hängen die Anzahlen*

$$|\{((A,B),(C,D))\in\omega_i\times\omega_j \mid (A,B)\wedge(C,D)=(E,F)\}|$$

und

$$|\{((A,B),(C,D))\in\omega_i\times\omega_j \mid (A,B)\vee(C,D)=(E,F)\}|$$

nicht *von dem gewählten Repräsentanten (E,F), sondern nur von dessen Bahn ab. Wir können diese Anzahlen deshalb mit*

$$a_{ijk}^{\wedge} := |\{((A,B),(C,D))\in\omega_i\times\omega_j \mid (A,B)\wedge(C,D)=(E,F)\}|$$

und

$$a_{ijk}^{\vee} := |\{((A,B),(C,D))\in\omega_i\times\omega_j \mid (A,B)\vee(C,D)=(E,F)\}|$$

bezeichnen. □

Jetzt führen wir Ringe ein, die diese Anzahlen als Strukturkonstanten haben. Dazu betrachten wir zunächst den *Halbgruppenring* von $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ über $\mathbb{Z}$, also die Menge

$$\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K})} = \{f \mid f\colon \mathcal{B}(\mathcal{K})\to\mathbb{Z}\},$$

zusammen mit punktweiser Addition und den durch $\wedge$ bzw. $\vee$ induzierten Faltungen als Multiplikationen:

$$(f+f')((A,B)) := f((A,B)) + f'((A,B)),$$

$$(f\star_{\wedge} f')((A,B)) := \sum_{(A,B)'\wedge(A,B)''=(A,B)} f((A,B)')f'((A,B)''),$$

bzw.

$$(f\star_{\vee} f')((A,B)) := \sum_{(A,B)'\vee(A,B)''=(A,B)} f((A,B)')f'((A,B)'').$$

Wir bezeichnen diese *Ringe* mit $\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\wedge}$ bzw. mit $\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\vee}$. Ihre Elemente schreiben wir als "formale Summen"

$$f = \sum_{(A,B)\in\mathcal{B}(\mathcal{K})} f_{(A,B)}(A,B), \text{ wobei } f_{(A,B)} := f((A,B)).$$

Bezogen auf die Operation von $Aut(\mathcal{K})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ nennen wir diejenigen f, die fest unter jedem $\gamma \in Aut(\mathcal{K})$ bleiben, also die f in

$$\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K})}_{Aut(\mathcal{K})} := \{f \in \mathbb{Z}^{\mathcal{B}}(\mathcal{K}) \mid \forall\, \gamma \in Aut(\mathcal{K})\colon f = f \circ \gamma^{-1}\}$$

$Aut(\mathcal{K})$–invariant oder die *$Aut(\mathcal{K})$–Invarianten.* Diese Invarianten bilden einen interessanten Teilring (Übungsaufgabe 2.3.1), dessen wichtigste Eigenschaften in dem folgenden Hilfssatz zusammengefaßt sind:

2.3.5 Hilfssatz

- *Die $Aut(\mathcal{K})$–Invarianten $f \in \mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$ bilden die Unterringe*

$$\left(\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\wedge}_{Aut(\mathcal{K})}, +, *_\wedge\right), \quad \left(\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\vee}_{Aut(\mathcal{K})}, +, *_\vee\right).$$

- *Diese Unterringe bestehen beide aus denjenigen $f\colon \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z}$, die konstant auf den Bahnen der Automorphismengruppe sind. Sie haben deshalb als $\mathbb{Z}$–Basis die* Bahnensummen

$$\underline{\omega_i} := \sum_{(A,B)\in\omega_i} (A, B),$$

das sind die charakteristischen Funktionen der Bahnen von $Aut(\mathcal{K})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{K})$.

- *Die Strukturkonstanten von $\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\wedge}_{Aut(\mathcal{K})}$ sind die $a^\wedge_{ijk}$, die Strukturkonstanten von $\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\vee}_{Aut(\mathcal{K})}$ sind die $a^\vee_{ijk}$, die in 2.3.4 definiert wurden, d. h. für die Produkte der Basiselemente gilt*

$$\underline{\omega_i} \star_\wedge \underline{\omega_j} = \sum_k a^\wedge_{ijk}\ \underline{\omega_k}$$

bzw.

$$\underline{\omega_i} \star_\vee \underline{\omega_j} = \sum_k a^\vee_{ijk}\ \underline{\omega_k}.$$

2.3.6 Folgerung *Weil die Matrizen $A^\wedge$ und $A^\vee$ über $\mathbb{Z}$ invertierbar sind, gilt:*

- *Die Abbildung*

$$\underline{\omega_k} \mapsto \begin{pmatrix} a^\wedge_{1k} \\ \vdots \\ a^\wedge_{dk} \end{pmatrix}$$

ist ein Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{Z}^{\mathcal{B}(\mathcal{K}),\wedge}_{Aut(\mathcal{K})}$ und $\mathbb{Z}^d$, während

- *die Abbildung*

$$\underline{\omega_k} \mapsto \begin{pmatrix} a^{\vee}_{1k} \\ \vdots \\ a^{\vee}_{dk} \end{pmatrix}$$

einen Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{Z}^{\mathfrak{B}(\mathcal{K}),\vee}_{Aut(\mathcal{K})}$ *und* $\mathbb{Z}^d$ *ergibt,*

wenn $\mathbb{Z}^d$ *mit punktweiser Addition und Multiplikation, also mit dem sogenannten* Hadamardprodukt, *versehen ist.* □

Dies ergibt eine interessante Aussage über die Möglichkeit, Begriffe als Infima bzw. als Suprema, also als größte gemeinsame Unterbegriffe, bzw. als kleinste gemeinsame Oberbegriffe auszudrücken:

2.3.7 Folgerung *Schreibt man das Hadamardprodukt aus i-ter und j-ter Spalte von* $A^{\wedge}$ *(bzw.* $A^{\vee}$*) als* $\mathbb{Z}$*-Linearkombination der Spalten von* $A^{\wedge}$ *(bzw.* $A^{\vee}$*), dann ist* $a^{\wedge}_{ijk}$ *(bzw.* $a^{\vee}_{ijk}$*) der Koeffizient der k-ten Spalte, also die Anzahl der Möglichkeiten, ein* $(A, B) \in \omega_k$ *als Infimum (Supremum), d. h. als größten gemeinsamen Unterbegriff (kleinsten gemeinsamen Oberbegriff) eines Begriffs aus* ω_i *und eines Begriffs aus* ω_j *zu schreiben.*

Man kann auch die Isomorphismen $\gamma\colon \mathcal{K} \simeq \mathcal{L}$ zwischen zwei Kontexten $\mathcal{K} = (G, M, I)$ und $\mathcal{L} = (H, N, J)$ als Begriffe auffassen. Ein solcher Isomorphismus ist nämlich von der Form $\gamma = (\alpha, \beta)$, d. h. ein Paar aus Bijektionen $\alpha\colon G \to H$ und $\beta\colon M \to N$, mit der Eigenschaft

$$\forall\, g \in G, m \in M\colon\ gIm \iff \alpha(g)J\beta(m).$$

Der Graph $\{(g, \alpha(g)) \mid g \in G\}$ von α ist eine Teilmenge von $G \times H$, der Graph von β eine von $M \times N$. Wenn wir also einfachheitshalber diese beiden Abbildungen mit ihren Graphen identifizieren, erhalten wir $\alpha \subseteq G \times H$ und $\beta \subseteq M \times N$. Wir können auf diese Weise die beiden Komponenten des Isomorphismus $\gamma\colon \mathcal{K} \simeq \mathcal{L}$ als Gegenstands- bzw. als Merkmalsmenge des folgenden Kontextes ansehen:

$$\mathcal{K} \tilde{\times} \mathcal{L} := (G \times H, M \times N, \sim),$$

mit

$$(g, h) \sim (m, n) :\iff [gIm \iff hJn].$$

2.3.8 Satz *Ist $\mathcal{L}$ bereinigt, und sind $\alpha: G \to H$, $\beta: M \to N$ bijektive Abbildungen, dann ist $\gamma := (\alpha, \beta)$ genau dann ein Isomorphismus von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{L}$, wenn (α, β) ein Begriff ist, d. h. wenn gilt*

$$\gamma = (\alpha, \beta) \in \mathcal{B}(\mathcal{K} \tilde{\times} \mathcal{L}).$$

Beweis: Für die Ableitung der Merkmalsmenge β in diesem Kontext gilt:

$$\beta' = \{(g, h) \mid \forall\, m \in M: gIm \iff hJ\beta(m)\}.$$

Die Inklusion $\alpha \subseteq \beta'$ ist demnach äquivalent zu

$$\forall\, g \in G, m \in M:\ gIm \iff \alpha(g)J\beta(m),$$

und letzteres bedeutet ja gerade, daß (α, β) ein Isomorphismus ist. Es bleibt deshalb nachzuweisen, daß für bereinigte Kontexte $\mathcal{L}$ und Isomorphismen (α, β) die Inklusion $\alpha \subseteq \beta'$ äquivalent zur Gleichheit $\alpha = \beta'$ ist, denn $\beta = \alpha'$ gilt dann ja aus Symmetriegründen ebenfalls. Wir müssen also nur noch zeigen, daß $(g, h) \in \beta'$ auch $(g, h) \in \alpha$ impliziert. Nun ist aber $(g, h) \in \beta'$ (s. o.) äquivalent zu

$$\forall\, m \in M:\ gIm \iff hJ\beta(m).$$

Weil (α, β) Isomorphismus ist, können wir hier die linke Seite gIm durch $\alpha(g)J\beta(m)$ ersetzen, und wir erhalten auf diese Weise

$$\forall\, m \in M:\ \alpha(g)I\beta(m) \iff hJ\beta(m).$$

Dies heißt aber gerade, daß $\alpha(g)' = h'$ gilt. $\mathcal{L}$ ist aber ein bereinigter Kontext, diese Gleichung impliziert also $\alpha(g) = h$, und das war noch zu zeigen. □

Spezielle Isomorphismen sind die Automorphismen, wir erhalten

2.3.9 Folgerung *Die Automorphismen bereinigter Kontexte $\mathcal{K}$ sind gerade die Begriffe von $\mathcal{K} \tilde{\times} \mathcal{K}$:*

$$Aut(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathcal{K} \tilde{\times} \mathcal{K}).$$

□

Die Automorphismengruppe $Aut(\mathcal{K})$ zerlegt $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ in Bahnen. Zur Bestimmung *aller Begriffe* reicht deshalb eine Transversale dieser Bahnen, vorausgesetzt, man hat die Automorphismengruppe zur Hand. Wegen der lexikographischen Anordnung der Begriffe hat man sogar *kanonische Transversalen,* beispielsweise die Begriffe mit den jeweils (in ihrer Bahn) lexikographisch maximalen Begriffsumfängen, die sogenannten *bahnmaximalen* Begriffsumfänge oder auch Begriffe. Zu einer Transversalenbestimmung genügt also die Ermittlung der bahnmaximalen Begriffsumfänge. Zur Vorbereitung eines entsprechenden Satzes beweisen wir zunächst eine Verallgemeinerung von 2.2.10:

2.3.10 Hilfssatz *Ist $G = \underline{n}$ und $\mathcal{F}$ eine Familie von Begriffsumfängen aus $\mathcal{K}$ mit der folgenden Eigenschaft:*

$$B \in \mathcal{F}, i \in G \Rightarrow (B \cap \underline{i-1})'' \in \mathcal{F},$$

dann ist gegebenenfalls

$$A^+ := A \oplus i$$

die zu $A \subseteq G$ lexikographisch nächst größere Gegenstandsmenge in $\mathcal{F}$, wenn i der größte Gegenstand ist, für den $A <_i A \oplus i$ sowie $A \oplus i \in \mathcal{F}$ gelten.

Beweis: Wir nehmen also an, daß es Elemente B von $\mathcal{F}$ gibt, die größer sind als A, A^+ sei der kleinste dieser Begriffsumfänge. Für ein geeignetes i ist dann $A <_i A^+$, und weil A^+ ein Begriffsumfang ist, gilt hierfür nach 2.2.1:

$$A <_i A \oplus i \leq A^+.$$

Unser Ziel ist natürlich der Nachweis von $A^+ = A \oplus i$.

i) $A \oplus i \in \mathcal{F}$: Die Ungleichung $A <_i A^+$ impliziert $A \cap \underline{i-1} = A^+ \cap \underline{i-1}$, so daß gilt:

$$(A \cap \underline{i-1}) \cup \{i\} = A^+ \cap \underline{i}.$$

Wir erhalten daraus

$$A \oplus i = ((A \cap \underline{i-1}) \cup \{i\})'' = (A^+ \cap \underline{i})'' \in \mathcal{F},$$

und das wollten wir zeigen.

ii) Wegen $\mathcal{F} \ni A \oplus i \leq A^+$ gilt aber, da A^+ das kleinste Element aus $\mathcal{F}$, oberhalb von A, sein sollte:

$$A^+ = A \oplus i.$$

iii) Es bleibt der Nachweis zu führen, daß i der maximale Gegenstand mit $A <_i A \oplus i$ ist. Gäbe es ein größeres j mit $A <_j A \oplus j \in \mathcal{F}$, dann wäre, nach Übungsaufgabe 2.2.1, Punkt ii),

$$\mathcal{F} \ni A \oplus j <_i A \oplus i,$$

im Widerspruch zur Minimalität von $A^+ = A \oplus i$.

Das komplettiert den Beweis. □

2.3.11 Hilfssatz *Ist B ein Begriffsumfang, $A := (B \cap \underline{i-1})''$, dann gilt für alle $(\alpha, \beta) \in Aut(\mathcal{K})$:*

$$A < \alpha(A) \Longrightarrow B < \alpha(B).$$

Beweis: Wegen $A < \alpha(A)$ gibt es j mit $A <_j \alpha(A)$.

i) $j < i$: Wir wollen dies indirekt beweisen.

Nehmen wir also an, es sei $i \leq j$. Es gilt dann

$$A \cap \underline{i-1} = \alpha(A) \cap \underline{i-1}.$$

Da $A = (A \cap \underline{i-1})''$ gilt:

$A = (B \cap \underline{i-1})'' = B \cap \underline{i-1}'' \Rightarrow A \subseteq \underline{i-1}'' \Rightarrow A = (A \cap \underline{i-1})''$,

können wir wie folgt weiter argumentieren:

$$A = (A \cap \underline{i-1})'' = (\alpha(A) \cap \underline{i-1})''$$
$$= \alpha(A)'' \cap \underline{i-1}'' = \alpha(A'') \cap \underline{i-1}'' = \alpha(A) \cap \underline{i-1}''.$$

Das ergibt

$$A \subseteq \alpha(A),$$

und damit, wegen der Bijektivität von $\alpha : A = \alpha(A)$. Das widerspricht aber der Vorausssetzung $A < \alpha(A)$, und wir haben $j < i$ bewiesen.

ii) Die gerade bewiesene Ungleichung $j < i$ ergibt

$$\alpha(A) \cap \underline{j-1} = A \cap \underline{j-1} = B \cap \underline{i-1}'' \cap \underline{j-1} = B \cap \underline{j-1}.$$

Wegen $j \notin A = B \cap \underline{i-1}''$ und $j \in \underline{i-1} \subseteq \underline{i-1}''$ folgt $j \notin B$. Die gerade hergeleitete Identität

$$\alpha(A) \cap \underline{j-1} = B \cap \underline{j-1}$$

liefert deshalb — mit $j \in \alpha(A)$ — die Ungleichung $B <_j \alpha(A)$. Nach $A \subseteq B$ ist aber $\alpha(A) \leq \alpha(B)$, so daß sich insgesamt die Behauptung $B < \alpha(B)$ ergibt.

$\square$

Damit können wir beweisen, daß die bahnmaximalen Begriffsumfänge eine Familie bilden, welche die Voraussetzungen von 2.3.10 erfüllt:

2.3.12 Hilfssatz *Die Familie $\mathcal{F}$ der bahnmaximalen Begriffsumfänge erfüllt die Voraussetzung von 2.3.10: Ist B ein bahnmaximaler Begriffsumfang und $i \in G$, dann ist auch $(B \cap \underline{i-1})''$ ein bahnmaximaler Begriffsumfang.*

Beweis: Wäre $A := (B \cap \underline{i-1})''$ nicht bahnmaximal, so gäbe es einen Automorphismus $(\alpha, \beta) \in Aut(\mathcal{K})$ mit $A < \alpha(A)$, nach 2.3.11 würde $B < \alpha(B)$ folgen, der Begriffsumfang B wäre demnach nicht bahnmaximal, im Widerspruch zur Annahme.

$\square$

Die Konstruktion des lexikographisch nächst größeren bahnmaximalen Begriffsumfangs folgt jetzt direkt aus 2.3.10.

2.3.13 Satz *Ist $G = \underline{n}$, dann ist der kleinste bahnmaximale Begriffsumfang oberhalb $A \subseteq G$ die Gegenstandsmenge*

$$A^+ := A \oplus i,$$

wenn $i \in G$ das größte Element ist mit

$$A <_i A \oplus i, \text{ und } \forall\, \gamma = (\alpha, \beta) \in Aut(\mathcal{K}) : \ \alpha(A \oplus i) \leq A \oplus i.$$

$\square$

Wir haben hiermit einen (von Ganter stammenden) Algorithmus zur Hand, der die Berechnung einer kanonischen Transversalen $\mathcal{R}$ der Bahnen von $Aut(\mathcal{K})$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ ermöglicht. Unser Interesse gilt aber dem gesamten Verband, das heißt, wir brauchen auch die Inklusionen zwischen benachbarten Bahnen.

Betrachten wir deshalb zwei Begriffsumfänge $A, B \in \mathcal{R}$, und nehmen wir an, es sei A unterer Nachbar von B (tatsächlich benötigen wir diese Nachbarschaft für die folgenden Überlegungen nicht, es genügt vielmehr die Annahme von $A < B$). Es gilt, die Anzahl der Begriffsumfänge aus der Bahn von A zu berechnen, die unterhalb von B liegen. Dazu betrachten wir die Menge

$$\{\gamma \in Aut(\mathcal{K}) \mid \gamma(A) \subseteq B\}.$$

Übungen

Ü 2.3.1 Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}_{Aut(\mathcal{K})}^{\mathcal{B}(\mathcal{K})}$ tatsächlich ein Ring ist.

2.4 Beispiele und Konstruktionen von Kontexten

Beginnen wir mit einigen Standardbeispielen von Kontexten:

2.4.1 Beispiele Hier sind einige Standardbeispiele von Kontexten und deren Begriffsverbänden, die zu jeder Menge X bzw. zu jeder Halbordnung $(X, \leq)$ existieren:

- Unter der *Nominalskala* verstehen wir den Kontext
$$\mathcal{K} := (X, X, =),$$
also den Kontext mit $G = M := X$ und der Gleichheit "="als Inzidenzrelation, d.h. mit der Einheitsmatrix als Inzidenzmatrix. Begriffe sind hier die Paare $(\emptyset, X)$, $(X, \emptyset)$, falls $|X| > 1$, $(\emptyset, \emptyset)$, falls $X = \emptyset$, sowie die Zweiermengen $(\{x\}, \{x\}), x \in X$.

- Die *Kontranominalskala* hat ebenfalls $G = M := X$, jetzt ist die Inzidenzrelation aber $\neq$. Begriffe sind die Paare $(Y, X \backslash Y)$, der Begriffsverband ist also isomorph zum Potenzmengenverband von X :
$$\mathcal{B}(X, X, \neq) \ \simeq \ (2^X, \cap, \cup).$$

- Ist $(X, \leq)$ eine Halbordnung, dann heißt der Kontext $(X, X, \leq)$ die *Allgemeine Ordinalskala.* Begriffe sind die Paare (A, B), wobei B die Menge der oberen Schranken von A, A die Menge der untere Schranken von B ist.

- Eine Halbordnung $(X, \leq)$ definiert auch eine *Kontraordinalskala,* das ist der Kontext $(X, X, \not\geq)$, dessen Begriffe die Paare (A, B) sind mit $A \dot\cup B = X$, deren Begriffsumfang A (Begriffsinhalt B) ein Ordnungsideal (Ordnungsfilter) in X ist, d.h. $x \leq a \in A$ $(x \geq b \in B)$ impliziert $x \in A$ $(x \in B)$.

- Sei X eine Menge, $\binom{X}{2}$ die Menge der Paare von Elementen, $x_0 \in X$, $2^{X \backslash \{x_0\}}$ die Potenzmenge von $X \backslash \{x_0\}$. Wir bilden daraus den Kontext
$$\left(\binom{X}{2}, 2^{X\backslash\{x_0\}}, \diamond\right), \text{ mit } \{x, y\} \diamond Y :\Longleftrightarrow \ |\{x, y\} \cap Y| \in \{0, 2\}.$$

Jede Gegenstandsmenge $A \subseteq \binom{X}{2}$ kann als symmetrische Relation auf X angesehen werden, die wir zudem als reflexiv auffassen wollen.

Sind $A \ni \{x,y\},\{y,z\} \in Z \in A'$, dann gilt auch $\{x,z\} \in Z$. Sind dagegen die Schnitte von $\{x,y\}$ und von $\{y,z\}$ mit Z leer, dann gilt das auch für den Schnitt von Z mit $\{x,z\}$. Daraus folgt, daß A'' eine transitive Relation sein muß. Jeder Begriffsumfang des Begriffsverbandes ist demnach eine Äquivalenzrelation. Die Umkehrung gilt offensichtlich auch, $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ ist isomorph zum Verband der Äquivalenzrelationen auf X.

Das Element x_0 wurde herausgenommen, um doppelte Spalten in der Inzidenzmatrix zu vermeiden, wie folgendes Beispiel für $X := \{1,2,3\}$ illustriert:

	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,2\}$	$\times$			$\times$	$\times$			$\times$
$\{1,3\}$	$\times$		$\times$			$\times$		$\times$
$\{2,3\}$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$

ist die Inzidenzmatrix von $(\binom{X}{2}, 2^X, \diamond)$, während die zur Gegenstandsmenge $2^{X\setminus\{3\}}$ wie folgt aussieht:

	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\times$			$\times$
$\{1,3\}$	$\times$		$\times$	
$\{2,3\}$	$\times$	$\times$		

$\diamond$

Wir wollen jetzt noch einige Konstruktionsverfahren diskutieren und anwenden, die aus vorgegebenen Kontexten auf überschaubare Weise neue Kontexte zu konstruieren erlauben. Sei also $\mathcal{K} = (G, M, I)$ ein vorgegebener Kontext. Der Kontext

$$\mathcal{K}^k := (G, M, (G \times M)\setminus I)$$

heißt der zu $\mathcal{K}$ *komplementäre* Kontext. Mit

$$\mathcal{K}^t := (M, G, I^t)$$

(I^t die zu I transponierte Inzidenzrelation) bezeichnen wir den zu $\mathcal{K}$ *transponierten* oder auch *dualen* Kontext. Der duale des komplementären ist der komplementäre des dualen:

$$\mathcal{K}^{kt} = \mathcal{K}^{tk},$$

er heißt der zu $\mathcal{K}$ *konträre* Kontext. Ist $\mathcal{L} = (G, N, J)$ ein zweiter vorgegebener Kontext, dann nennen wir

$$\mathcal{K} \mid \mathcal{L} := (G, M\dot{\cup}N, I\dot{\cup}J)$$

die *Apposition.* Sie entsteht durch disjunkte Vereinigung der Merkmalsmengen. Falls M und N nicht disjunkt sind, müssen wir also aus diesen Mengen bijektive und disjunkte herstellen, etwa durch Änderung der Bezeichung der Elemente, und diese nunmehr disjunkten Mengen dann vereinigen. Für $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L} = (H, M, J)$ heißt

$$\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{L}} := (G\dot{\cup}H, M, I\dot{\cup}J)$$

die *Subposition* von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$. Schließlich ergibt sich auf naheliegende Weise aus $\mathcal{K} = (G, M, I)$ und $\mathcal{L} = (H, N, J)$ die *disjunkte Vereinigung*

$$\mathcal{K}\dot{\cup}\mathcal{L} := (G\dot{\cup}H, M\dot{\cup}N, I\dot{\cup}J).$$

Weitere Konstruktionen beschreiben wir durch Angabe der betreffenden Inzidenzmatrizen. Ist $\mathcal{X} := (G, M, G\times M)$, (bzw. $\mathcal{O} := (G, M, \mathcal{O})$) also der Kontext auf G und M, dessen Inzidenzmatrix aus lauter Einsen (Nullen) besteht, und identifizieren wir jetzt Kontext mit Inzidenzmatrix, so heiße, für $\mathcal{K} := (G, M, I)$ und $\mathcal{L} := (H, M, J)$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{K} & \mathcal{X} \\ \hline \mathcal{O} & \mathcal{L} \end{array}\right)$$

die *vertikale Summe,*

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{K} & \mathcal{O} \\ \hline \mathcal{O} & \mathcal{L} \end{array}\right)$$

die *horizontale Summe* von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$. Der Kontext mit der Inzidenzmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{K} & \mathcal{X} \\ \hline \mathcal{X} & \mathcal{L} \end{array}\right)$$

heißt die *direkte Summe.* Das *direkte Produkt* ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{K} \times \mathcal{L} := (G \times H, M \times N, \nabla),$$

mit

$$(g, h)\nabla(m, n) :\Longleftrightarrow gIm \vee hJn.$$

2.4.2 Beispiele Zu jeder Halbordnung $(X, \leq)$ gibt es die folgenden beiden Kontexte. Der Kontext

$$(X, X, \leq) \mid (X, X, \geq)$$

heißt die *Allgemeine Interordinalskala,* während

$$(X, X, \not\geq) \mid (X, X, \not\leq)$$

die zugehörige *Konvex-ordinale Skala* genannt wird.

$\diamond$

Interessant ist auch die Möglichkeit, bei gewissen Kontexten *Rekursionsformeln für die Inzidenzmatrix* anzugeben. Betrachten wir einmal den Kontext

$$(2^X, 2^X, \not\supseteq).$$

Hier sind also zwei Teilmengen Y und Z von X genau dann inzident, wenn $Y \not\supseteq Z$, oder, was dasselbe ist, wenn $Z \cap X \backslash Y \neq \emptyset$. Da eine Teilmenge $Y \subseteq X$ durch ihr Komplement $X \backslash Y$ eindeutig bestimmt ist, können wir demnach den Kontext $(2^X, 2^X, \not\supseteq)$ mit dem Kontext

$$\mathcal{K} := (2^X, 2^X, I), \text{ mit } YIZ \iff Y \cap Z \neq \emptyset$$

identifizieren. Setzen wir hier

$$\mathcal{K}_n := (2^{\underline{n}}, 2^{\underline{n}}, I),$$

dann zeigt man leicht, daß folgende Rekursion gilt (wenn die reihenfolgemäßig letzten Elemente der Potenzmenge die Teilmengen von $\underline{n+1}$ sind, die das Element $n+1$ enthalten):

$$\mathcal{K}_0 = (0), \text{ und } \mathcal{K}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{K}_n & \mathcal{K}_n \\ \hline \mathcal{K}_n & \mathcal{X} \end{array} \right).$$

Literaturverzeichnis

[1] J. D. Dixon, H. S. Wilf: The random selection of unlabeled graphs. *J. Algorithms* **4** (1983), 205-213.

[2] T. M. Mitchell: Version Spaces: An Approach to Concept Learning. *Ph. D. thesis,* Stanford University 1979.

[3] A. Arnauld, P. Nicole: La logique ou l'art de penser. *Paris* 1662.

[4] A. Arnauld, P. Nicole: Die Logik oder die Kunst des Denkens (aus dem Französischen übersetzt und eingeleitet von Christos Axelos). *Wissenschaftliche Buchgesellschaft,* Darmstadt, 1972.

[5] H.-G. Bartel: Mathematische Methoden in der Chemie. *Spektrum*, Akad. Verlag, 1996.

[6] N. G. de Bruijn: Pólyas Abzähl–Theorie: Muster für Graphen und chemische Verbindungen. In: K. Jacobs (ed.): Selecta Mathematica III. *Springer–Verlag,* Berlin et al., 1971.

[7] P. Burmeister: Merkmalsimplikationen bei unsicherem Wissen, *Vorabdruck*.

[8] V. Duquenne: Conceptual implications between attributes and some properties of finite lattices. In: B. Ganter, R. Wille, K. E. Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. *BI-Wissenschaftsverlag*, Mannheim/Wien/Zürich, 1987, 213-239.

[9] G. Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. *Nebert*, Halle/Saale, 1879, 88 S.

[10] B. Ganter, R. Wille: Formale Begriffsanalyse. Mathematische Grundlagen. *Springer–Verlag*, Berlin et al., 1996.

[11] B. Ganter, R. Wille, K. E. Wolff (Hrsg.): Beiträge zur Begriffsanalyse. *BI-Wissenschaftsverlag*, Mannheim et al., 1987.

[12] A. Kerber: Algebraic Combinatorics via Finite Group Actions. *BI-Wissenschaftsverlag*, Mannheim/Wien/Zürich, 1991.

[13] A. Kerber, K.–J. Thürlings: Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzählungstheorie. *Bayreuther Math. Schriften* 12 (1983), 235 S.

[14] H. Kurzweil: Endliche Gruppen. Eine Einführung in die Theorie der endlichen Gruppen. *Springer–Verlag,* Berlin et al., 1977.

[15] R. Laue: Construction of combinatorial objects – a tutorial. *Bayreuther Mathematische Schriften*, **43**, pp. 53–96, 1993.

[16] G. Pólya, R. C. Read: Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds. *Springer–Verlag*, New York Inc., 1987.

[17] B. Schmalz: Verwendung von Untergruppenleitern zur Bestimmung von Doppelnebenklassen. *Bayreuther Mathematische Schriften*, **31**, pp. 109–143, 1990.

[18] B. Schmalz: t-Designs zu vorgegebener Automorphismengruppe. *Bayreuther Mathematische Schriften*, **41**, pp. 1–164, 1992.

[19] B. Schmalz: The t-designs with prescribed automorphism group, new simple 6-designs. *J. Comb. Designs*, **1**, pp. 125–146, 1993.

[20] F. Vogt: Datenstrukturen und Algorithmen zur Formalen Begriffsanalyse: Eine C^{++}-Klassenbibliothek. *Springer–Verlag,* Berlin et al., 1996.

[21] H. Wielandt: Ein Beweis für die Existenz von Sylowgruppen. *Archiv. Math.* **10** (1959), 401-402.

[22] M. Wiesend: Kombinatorische Anzahlbestimmungen von Kontext und Begriffsverband. *Diplomarbeit*, Bayreuth 1996

[23] S. G. Williamson: Combinatorics for Computer Science. *Rockeville,* 1985.

Index

Index